



QUELQUES FORMULES UTILES EN PHOTOGRAMMETRIE

Y.EGELS

Janvier 2006

SOMMAIRE

A/ Rotations, similitudes, affinités, homographies .

1/ Rotations **3**
2/ Similitudes **3**
3/ Affinités **3**
4/ Espaces projectifs **4**
5/ Homographies **4**

B / Matrices rotation

1/ Définition **4**
2/ Matrice rotation des appareils de restitution analogiques **5**
3/ Matrice rotation, exponentielle et axiateur **5**
4/ Matrices rotation et Quaternions **7**
5/ Démonstration géométrique de la formule d'Euler **7**
6/ Différentielle d'une matrice rotation **8**

C/ Equation de colinéarité

1/ Perspective d'un point de l'espace **9**
2/ Relation différentielle liant m aux paramètres du faisceau **10**
3/ Application : orientation relative en analogique **10**

D/ Géométrie réelle des images

1/ Correction de courbure de terre **12**
2/ Réfraction atmosphérique **14**
3/ Distorsion de l'optique **16**
4/ Déformations du capteur **17**
5/ Modélisation des défauts non quantifiables **18**

E/ Quelques règles pratiques **18**

A/ <u>Rotations, similitudes, affinités, homographies .</u>

Les problèmes liés à la photogrammétrie font souvent intervenir ces quatre types de transformation, dont il est indispensables de bien connaître les propriétés, dans des espaces à 2 ou 3 dimensions.

1/ Rotations

Une rotation est un déplacement dans l'espace considéré, elle peut donc être représentée par un changement de base orthonormée dans cet espace. Sous forme matricielle, une rotation s'écrit :

$$X' = R.X + T$$

où X,X' et T sont des matrices colonnes (n,1) et R une matrice orthogonale (n,n). L'ensemble de ces transformations ne forment un espace vectoriel ni dans R^2 ni dans R^3. Le nombre de paramètres définissant une rotation est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

2/ Similitudes

Une similitude est la composition d'une homothétie et d'une rotation. Il s'agit donc (à 3 dimensions) de la transformation correspondant au basculement d'un modèle photogrammétrique. En reprenant les notations précédentes, elle peut s'écrire:

$$X' = k.R.X + T$$
$$avec\ k\ scalaire$$

Le scalaire ainsi défini est l'échelle de la similitude.

Les similitudes ne forment pas un espace vectoriel dans R^3 mais ont cette structure dans R^2 . En effet, à 2 dimensions, on peut écrire:

$$R = k.\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$En\ posant\ a = k\ \cos\theta\ et\ b = k\ \sin\theta, on\ a$$

$$R = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3/ Affinités

L'affinité est la transformation linéaire générale dans l'espace considéré. Dans le plan, elle transforme un carré en un parallélogramme quelconque, dans l'espace un cube en parallélépipède. Les affinités forment un espace vectoriel de dimension n^2, et sont représentées par toute matrice carrée.

4/ Espaces projectifs

La notion d'espace projectif est destinée à axiomatiser les points à l'infini. Sur un espace vectoriel E de dimension n, privé de son éléments neutre, on peut définir la relation d'équivalence correspondant à la colinéarité des vecteurs de E. L'ensemble des classes d'équivalences (ensemble quotient) forme un espace projectif de dimension n-1.

En pratique, l'espace projectif ***P*** de dimension 3 peut être vu comme l'ensemble des directions d'un espace vectoriel ***V*** de dimension 4.

On peut faire correspondre à tout point M de ***P*** un vecteur A de ***V*** de la façon suivante :

$M(X,Y,Z) \in P^3 \rightarrow A(x,y,z,w) \in R^4$ par $x = Xw; y = Yw; z = Zw$ avec $w \neq 0$ (on prend habituellement $w = 1$)

Dans l'autre sens, tout vecteur de ***V*** ne correspond pas à un point « ordinaire » de ***P***

si $w \neq 0$ $A(x,y,z,w) \in R^4 \rightarrow M(X,Y,Z) \in P^3$ par $X = x/w; Y = y/w; Z = z/w$

Par contre, si $w = 0$, on obtient le point à l'infini dans la direction de A.

Cette formulation est très utilisée dans le domaine de la vision artificielle (par exemple dans la bibliothèque graphique 3D OpenGL) car les transformations liées à la perspective y sont linéaires. Mais attention : le produit scalaire de ***V*** n'induit pas de structure d'espace Euclidien sur ***P***. Il est donc dangereux d'utiliser cette formulation lorsque l'on veut obtenir des valeurs métriques (angles et distances)

5/ Homographies

L'homographie est une transformation linéaire d'un espace projectif dans un autre, elle est donc représentée par une matrice quelconque opérant sur les coordonnées homogènes. Le nombre de paramètres nécessaire à la définition d'une homographie d'un espace de dimension m dans un espace de dimension n est égal à *(m+1)(n+1)-1*. A titre d'exemple, l'homographie de l'espace R^3 dans R^2 s'écrit (avec 11 paramètres):

$$x = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1}{a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + 1} \quad y = \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2}{a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + 1}$$

Les perspectives de l'espace dans le plan sont des homographies de R^3 dans R^2, de même la transformation faisant passer d'une perspective à une autre de même point de vue est une homographie de R^2 dans lui même.

B / Matrices rotation

1/ Définition

Une matrice rotation est par définition une matrice orthogonale de rang n, c'est à dire une matrice de changement de base orthonormée dans un espace vectoriel euclidien. Une propriété nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée soit une matrice rotation est que :

$$R^{-1} = {}^tR$$

2/ Matrice rotation des appareils de restitution analogiques

Dans un appareil analogique, les axes de rotation des porte-clichés sont mobiles. L'axe primaire est fixe, l'axe secondaire est mobile autour du premier, l'axe tertiaire est mobile autour des deux précédents. Dans tous les appareils courants, l'axe des déversements (perpendiculaire au plan du cliché) est choisi comme axe tertiaire. Il ne reste alors que deux possibilités: site primaire ou convergence primaire. Les matrices correspondantes sont le produit des 3 matrices de base, correspondant au site, à la convergence et au déversement.

$$R\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} R\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} R\kappa = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega : site \quad \varphi : convergence \quad \kappa : déversement$$

Ainsi, pour les appareils à site primaire, on aura:

$$R = R\kappa\, R\varphi\, R\omega =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \sin\varphi\cos\omega\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \sin\varphi\cos\omega\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\omega & \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix}$$

De même, dans le cas où la convergence est primaire, cette matrice devient:

$$R = R\,\kappa\;\; R\omega\;\; R\phi =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa + \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa & \cos\omega\sin\kappa & -\sin\varphi\cos\kappa + \sin\omega\cos\varphi\sin\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa + \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa & \sin\varphi\sin\kappa + \sin\omega\cos\varphi\cos\kappa \\ \sin\varphi\cos\omega & -\sin\omega & \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix}$$

Ces formules peu élégantes peuvent être utilisées par exemple pour calculer les éléments de mise en place sur un appareil analogique, lorsque l'on dispose des matrices rotation issues d'un calcul de photogrammétrie analytique. On tire ainsi pour un appareil à convergence primaire, en identifiant les deux matrices terme à terme :

$$\varphi = \arcsin(R_{31})\;\; \omega = \arcsin\left(\frac{-R_{32}}{\cos\varphi}\right)\;\; \kappa = \arcsin\left(\frac{-R_{21}}{\cos\varphi}\right)$$

3/ Matrice rotation, exponentielle et axiateur

Comme il a été vu plus haut, les matrices rotation sur un espace vectoriel de dimension n dépendent de $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres, mais ne forment pas un sous-espace vectoriel. Il donc n'existe malheureusement pas de formule linéaire liant une matrice rotation à ses "composantes". Il est cependant indispensable de pouvoir exprimer une telle matrice fonction de paramètres judicieusement choisis. Dans le

cas de R^3, les formules données au paragraphe précédent sont une première façon de faire, mais assez laborieuse.

On peut également définir physiquement une rotation de la manière suivante:

$$\textit{Rotation d'angle } \theta$$

$$\textit{autour d'un vecteur unitaire } \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1)$$

Nous appellerons axiateur d'un vecteur la matrice du produit vectoriel par ce dernier:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \tilde{\Omega}.V$$

$$\textit{on vérifiera que } \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de contrôler que la rotation précédente peut s'écrire : $R = e^{\tilde{\Omega}\theta}$. En effet,

$$e^{\tilde{\Omega}\theta} = I + \tilde{\Omega}\theta + \ldots + \frac{\tilde{\Omega}^n \theta^n}{n!} + \ldots$$

donc, puisque $\tilde{\Omega}.\Omega = \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} = 0$ (propriété bien connue du produit vectoriel) $e^{\tilde{\Omega}\theta}\Omega = \Omega \rightarrow \vec{\Omega}$ est bien l'axe de rotation, seul invariant.

On vérifiera aisément que $\tilde{\Omega}^3 = -\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^4 = -\tilde{\Omega}^2$ etc ; d'autre part, ${}^t\Omega = -\tilde{\Omega}$

$$\begin{aligned} {}^t(e^{\tilde{\Omega}\theta}) &= I + {}^t\tilde{\Omega}\theta + \ldots + \frac{{}^t\tilde{\Omega}^n \theta^n}{n!} + \ldots \\ &= I - \tilde{\Omega}\theta + \ldots + (-1)^n \frac{\tilde{\Omega}^n \theta^n}{n!} + \ldots \\ &= e^{-\tilde{\Omega}\theta} = (e^{\tilde{\Omega}\theta})^{-1} \end{aligned}$$

Cette matrice est donc bien une matrice rotation. On pourra également vérifier que l'angle de rotation est bien égal à θ, par exemple en calculant le produit scalaire d'un vecteur normal à ς avec son transformé.

On voit alors que, en regroupant les termes pairs et les termes impairs du développement *(Formule d'Euler/ Olinde Rodrigues)*:

$$\begin{aligned} R &= I + \tilde{\Omega}\theta - \frac{\tilde{\Omega}\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\tilde{\Omega}^2\theta^2}{2!} - \frac{\tilde{\Omega}^2\theta^4}{4!} + \ldots \\ &= I + \tilde{\Omega}\sin\theta + \tilde{\Omega}^2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Si l'on exprime sinθ et cosθ en fonction de tgθ/2 à l'aide des formules classiques de trigonométrie, il vient *(Formule de Thomson)* :

$$R = (I - \tilde{\Omega}\tan\frac{\theta}{2})^{-1}(I + \tilde{\Omega}\tan\frac{\theta}{2})$$

4/ Matrices rotation et Quaternions

Les quaternions ont été définis pour tenter de généraliser dans R^3 les propriétés des nombres complexes. Ils n'apportent rien de révolutionnaire, mais leur formalisme est très employé en vision artificielle et en imagerie 3D. L'ensemble des quaternions est le sous espace vectoriel des matrices 4x4, généré par la base suivante :

$$u=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} i=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix} j=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} k=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$$

La composante relative à *u* est la partie réelle du quaternion, les 3 composantes relatives à *i,j,k* en forment la partie pure.
Les antiquaternions sont générés par la base :

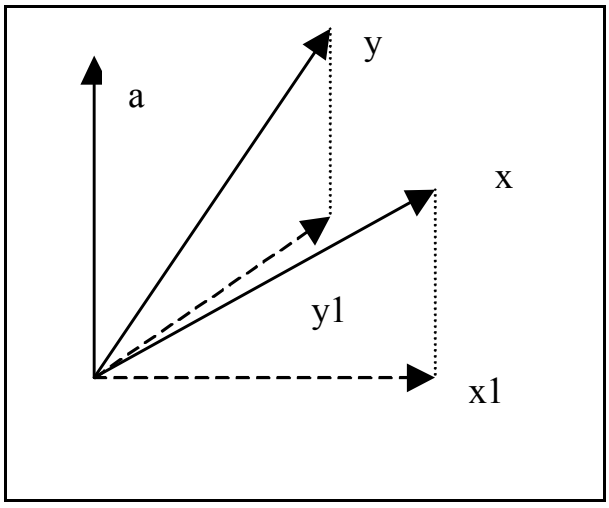
$$u=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \bar{i}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix} \bar{j}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \bar{k}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Les quaternions $P=ai+bj+ck+du$ et les antiquaternions $Q=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}+du$ de norme 1 (tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=1$) sont des matrices rotation de R^4

Par identifications avec la formule d'Olinde Rodrigues , on pourra vérifier que la partie pure du produit d'un quaternion P de composantes $(\alpha\sin\frac{\theta}{2},\beta\sin\frac{\theta}{2},\gamma\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})$ par son antiquaternion associé Q représente la matrice rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire $\vec{\Omega}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}$ (d'ou l'on peut tirer une démonstration simple de la formule de Thomson, en remarquant que $PQ={}^tP^{-1}Q$)

5/ Démonstration géométrique de la formule d'Euler

La formule d'Euler possède une interprétation géométrique évidente :



Soient

$\vec{x}$ *un vecteur de l'espace,*

$\vec{y}$ *son transformé par une rotation d'angle* θ *autour d'un vecteur unitaire* $\vec{a}$

$\vec{x}_1$ *et* $\vec{y}_1$ *leurs projections sur un plan perpendiculaire à* $\vec{a}$

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{y}_1 - \vec{x}_1 \quad (projection)$$
$$\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{y} - \vec{y}_1 = (\vec{a}.\vec{x})\vec{a}$$

Dans le plan orthogonal à $\vec{a}$, on peut écrire :

$$\vec{y}_1 = \cos\theta\ \vec{x}_1 + \sin\theta(\vec{a} \wedge \vec{x}_1)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \vec{x} - \vec{x}_1 + \vec{y}_1 \\
&= (\vec{a}.\vec{x})\vec{a} + \cos\theta\ \vec{x}_1 + \sin\theta(\vec{a} \wedge \vec{x}_1) \\
&= (\vec{a}.\vec{x})\vec{a} + \cos\theta(\vec{x} - (\vec{a}.\vec{x})\vec{a}) + \sin\theta(\vec{a} \wedge (\vec{x} - (\vec{a}.\vec{x})\vec{a})) \\
&= (\vec{a}.\vec{x})\vec{a} + \cos\theta(\vec{x} - (\vec{a}.\vec{x})\vec{a}) + \sin\theta(\vec{a} \wedge \vec{x}) \\
&= \vec{x}\ \cos\theta + \vec{a}(\vec{a}.\vec{x})(1 - \cos\theta) + (\vec{a} \wedge \vec{x})\sin\theta
\end{aligned}$$

Si l'on revient à la notation matricielle précédente, cette formule est équivalente à :

$$\begin{aligned}
Y &= X\cos\theta + AA^t\ X(1 - \cos\theta) + \tilde{A}X\sin\theta \\
&= [I\cos\theta + AA^t\ (1 - \cos\theta) + \tilde{A}\sin\theta]X \\
&\text{on vérifiera que } AA^t = \tilde{A}^2 + I \text{ d'oó} \\
Y &= [I + \tilde{A}\sin\theta + \tilde{A}^2\ (1 - \cos\theta)]X
\end{aligned}$$

6/ Différentielle d'une matrice rotation

Exprimée sous cette forme exponentielle, il est simple de différencier les matrices rotation. En effet, on peut choisir comme paramètres de la rotation les trois valeurs aθ, bθ et cθ
On peut alors écrire :

$$\vec{\Theta} = \vec{\Omega}\theta = \begin{pmatrix} a\theta \\ b\theta \\ c\theta \end{pmatrix} \text{ et } R = e^{\tilde{\Theta}}$$

d'où :

$$dR = e^{\widetilde{\Theta}}\, d\widetilde{\Theta} = R d\widetilde{\Theta}$$

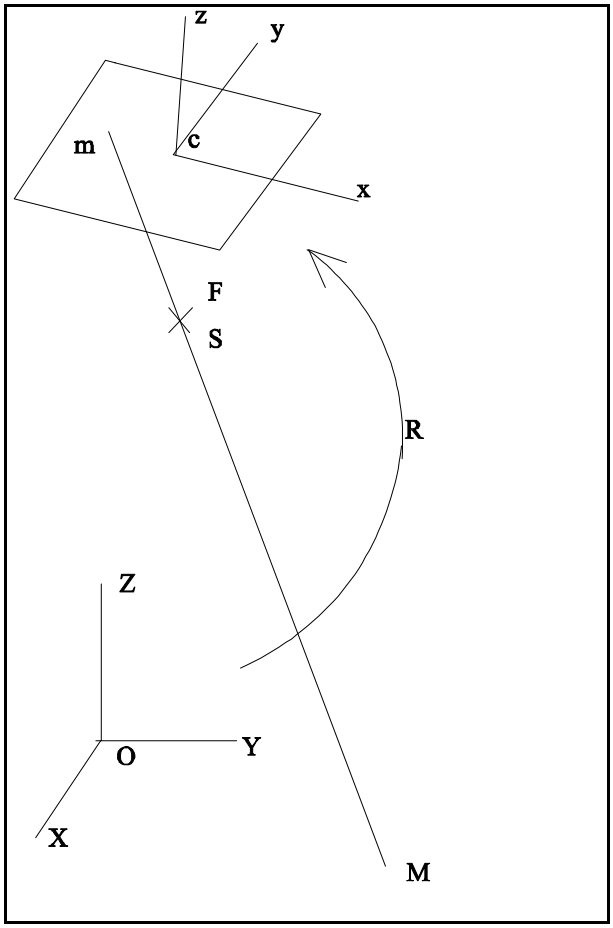
Dans cette expression, la différentielle fait intervenir les paramètres de la rotation sous forme matricielle, ce qui n'est pas très commode. Appliquée à un vecteur, elle peut s'écrire (en tenant compte de l'anticommutativité du produit vectoriel):

$$dR.A = R.d\widetilde{\Theta}.A = -R.\widetilde{A}.d\Theta$$

C/ Equation de colinéarité

1/Perspective d'un point de l'espace

La perspective m d'un point M de l'espace est l'intersection de la droite SM avec le plan du cliché.



$$M = \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ p \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m \text{ image de } M \Leftrightarrow \vec{Fm} = \lambda . \vec{SM}$$

Si l'on appelle K le vecteur unitaire orthogonal au cliché on peut écrire:

$m \in cliché \Leftrightarrow {}^tKm = 0$ d'où $\lambda = \dfrac{-{}^tKF}{{}^tKR(M - S)}$

Posons $A = M - S \text{ et } U = RA$, on tire $\lambda = -\dfrac{{}^tKF}{{}^tKU}$ d'où : $m = F - \dfrac{{}^tKFU}{{}^tKU}$

2/ Relation différentielle liant m aux paramètres du faisceau

L'équation précédente n'est pas linéaire, et pour résoudre les systèmes correspondant à la photogrammétrie analytique, il est nécessaire de la linéariser. Les variables que l'on prendra en compte sont F,M,S et R

$$dm = dF - \frac{{}^tKdF\,U}{{}^tKU} - \left(\frac{{}^tKF}{{}^tKU} - \frac{{}^tKF\,U\,{}^tK}{({}^tKU)^2)} \right) dU$$

$$dU = R(dM - dS) + dRA = r(dM - dS - \tilde{A}d\Theta$$

D'autre part, $K^t F$ étant un scalaire, ${}^tKFU = U\,{}^tKF \quad et \quad {}^tKdFU = U\,{}^tKdF$
On tire alors :

$$dm = \frac{{}^tKU - U\,{}^tK}{({}^tKU)^2} [\,{}^tKUdF - {}^tKFR(dM - dS - \tilde{A}d\Theta)]$$

Si l'on pose $p = {}^tKF$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} et\, V = \begin{pmatrix} u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & u_3 & -u_2 \end{pmatrix}$, on tire en décomposant les calculs:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{V}{u_3} dF + \frac{p}{u_3^2} VR(dS - dM) + \frac{p}{u_3^2} VR\tilde{A}d\Theta$$

3/ Application : orientation relative en analogique

Il s'agit de trouver l'orientation relative de deux faisceaux à partir de mesures de l'écart d'intersection entre les rayons homologues (parallaxe transversale). On prendra ici le cas d'un appareil permettant les 6 réglages angulaires (site, convergence, déversement des deux images), ce qui est le cas des appareils analogiques utilisés en TP (c'est le cas le plus répandu, mais malheureusement pas le plus simple !- en effet la mesure de parallaxe par la composante de base By est bien plus pratique...) . On

pourra partir de l'équation de colinéarité différentielle :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{V}{u_3} dF + \frac{p}{u_3^2} VR(dS - dM) + \frac{p}{u_3^2} VR\tilde{A} d\Theta$$

Dans les conditions courantes de prise de vues (axes quasi parallèles), on pourra prendre pour le sommet gauche S=0 et R=I, donc A=U=M.

$$dm = \frac{p}{Z^2} \begin{pmatrix} Z & 0 & -X \\ 0 & Z & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \end{pmatrix}$$

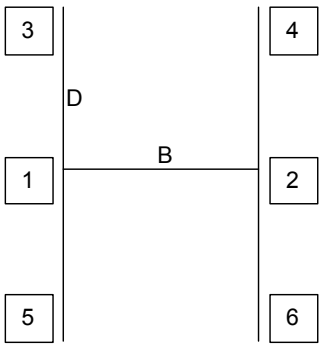
La parallaxe transversale sera mesurée par les écarts en y, d'où :

$$dy = \frac{p}{Z} \left(-\frac{Y^2 + Z^2}{Z} d\omega + \frac{XY}{Z} d\varphi + X d\kappa \right)$$

Pour le sommet droit, même calcul avec $S = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où l'on tire l'équation de la parallaxe :

$$\lambda = dy_2 - dy_1 = \frac{p}{Z} \left(-\frac{Y^2 + Z^2}{Z} (d\omega_2 - d\omega_1) + \frac{Y}{Z} [(X - B) d\varphi_2 - X d\varphi_1] + (X - B) d\kappa_2 - X d\kappa_1 \right)$$

L'orientation relative consiste donc à déterminer les valeurs des 5 variables angulaires indépendantes annulant la parallaxe sur les points de Von Gruber, d'abscisses 0 et B, d'ordonnées +D, 0 et -D.



Sur la ligne de nadir gauche, on a :

$$\lambda = -\frac{Y^2 + Z^2}{Z} \Delta\omega - \frac{BY}{Z} d\varphi_2 - B d\kappa_2$$

Pour les 3 point de Von Gruber, on obtient les 3 parallaxes suivantes :

$$\lambda_3 = -\frac{D^2 + Z^2}{Z} \Delta\omega - \frac{BD}{Z} d\varphi_2 - B d\kappa_2$$
$$\lambda_1 = -Z\Delta\omega \qquad\qquad - B d\kappa_2$$
$$\lambda_5 = -\frac{D^2 + Z^2}{Z} \Delta\omega + \frac{BD}{Z} d\varphi_2 - B d\kappa_2$$

Une méthode par éliminations va permettre de résoudre le système :

- On remarquera que κ_2 ajoute une parallaxe constante sur tout le nadir, alors que ϕ_2 introduit des parallaxes opposées en 3 et 5
- On peut éliminer la parallaxe centrale à l'aide de κ_2. On obtient alors les parallaxes suivantes :

$$\lambda_3 = (Z - \frac{D^2 + Z^2}{Z})\Delta\omega - \frac{BD}{Z} d\varphi_2$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_5 = (Z - \frac{D^2 + Z^2}{Z})\Delta\omega + \frac{BD}{Z} d\varphi_2$$

- Si on annule la parallaxe en 3 avec ϕ_2, on ajoutera celle-ci en 5. On obtient les parallaxes suivantes :

$$\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_5 = 2\frac{D^2}{Z}\Delta\omega$$

- On peut mesurer cette parallaxe en 5 en l'annulant en introduisant un site ω_p (on pourrait le faire plus simplement avec κ_2, mais celui-ci n'est pas toujours gradué !).

$$\omega_p = \lambda_5 \frac{Z}{Z^2 + D^2} = \frac{2D^2}{Z^2 + D^2}\Delta\omega$$
$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\frac{Z^2}{D^2} + 1)\omega_p$$

Le coefficient $\frac{1}{2}(\frac{Z^2}{D^2} + 1)$ est le coefficient de surcorrection par le site.

- Après cette mesure, on introduit $\omega_1 = -\frac{1}{2}(\frac{Z^2}{D^2} + 1)\omega_p$, puis on élimine les parallaxes ainsi introduites en 1 grâce à κ_2 et en 3 avec ϕ_2.
- Les parallaxes du nadir droit sont annulées en 2 par κ_1 et en 4 par ϕ_1. La parallaxe en 6 doit alors être nulle. Si ce n'est pas le cas, soit l'appareil est mal réglé, soit c'est l'opérateur...

D/ <u>Géométrie réelle des images</u>

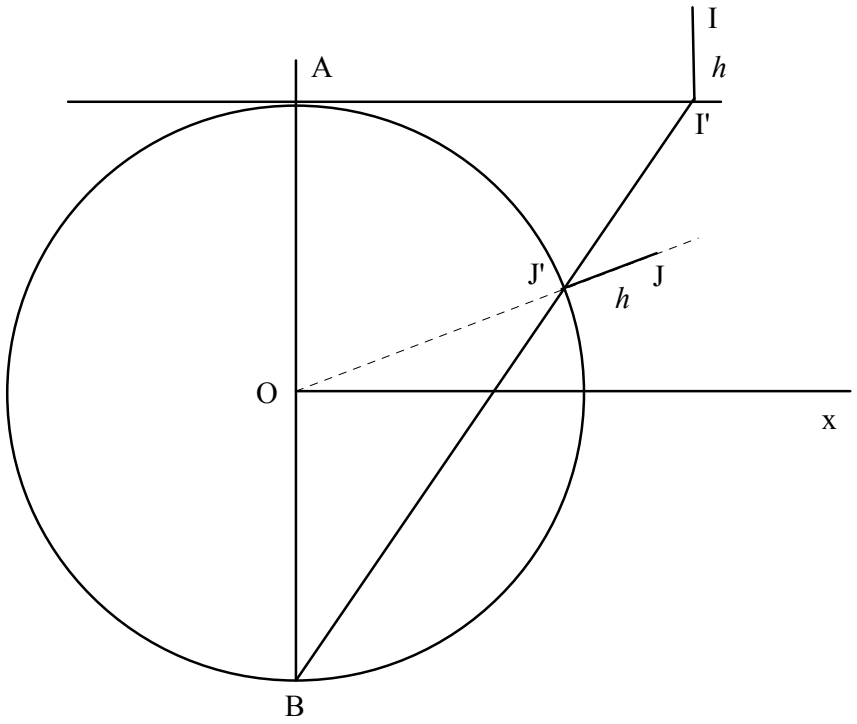
1/ Correction de courbure de terre

La cause première de ce que les photogrammètres ont coutume de nommer correction de courbure de terre en photogrammétrie est que l'espace dans lequel opèrent les cartographes n'est pas l'espace Euclidien dans lequel l'équation de colinéarité est établie. Il s'agit en effet d'un système cartographique, dans lequel la planimétrie est mesurée dans une représentation plane (souvent conforme) de l'ellipsoïde, et l'altimétrie dans un système d'altitude.

La meilleure solution pour tenir compte de ce fait est de réaliser le plus rigoureusement possible les passages de cartographique en tridimensionnel (il est habituellement plus pratique de choisir un repère tridimensionnel local tangent, ne serait-ce que pour écrire des relations d'appui planimétrique ou altimétrique de façon simple). Cette solution, si elle est la meilleure sur le plan théorique, est cependant un peu difficile à mettre en oeuvre de façon industrielle, car elle rend nécessaire de disposer d'une base de données des systèmes géodésiques, des algorithmes des projection (parfois bizzares) utilisées dans les pays clients, et de disposer d'un modele de la surface de niveau 0 du système altimétrique concerné.

Une solution approchée à ce problème peut néanmoins être trouvée, qui -l'expérience le prouve-est d'une précision compatible avec la précision de cette technique de mesure. Elle repose sur le fait que toutes les projections conformes sont localament équivalentes à une similitude près. On peut donc tenter de remplacer la projection réelle dans laquelle sont exprimées les coordonnées du chantier par une projection conforme unique (et pourquoi pas simple!), par exemple une stéréographique oblique de la sphère (on n'est plus à ça près) sur le plan tangent au centre du chantier (c'est le nom compliqué que les géodésiens donne à la bonne vielle inversion).

La formulation mathématique devient alors (la figure est faite dans le plan diamétral de la sphère contenant le centre du chantier A et le point I à transformer):



I est le point à transformer (cartographique), J le résultat(tridimensionnel), I' la projection de I sur le plan et J' la projection de J sur la sphère terrestre de rayon R. I' et J' sont inverses l'un de l'autre dans une inversion de pôle B et de puissance $4R^2$.

Posons :

$$I = \begin{cases} x \\ R+h \end{cases} \quad I' = \begin{cases} x \\ R \end{cases} \quad J' = \begin{cases} x' \\ y' \end{cases} \quad J = (1+\beta)\begin{cases} x' \\ y' \end{cases} \qquad \alpha = \frac{x}{2R} \quad \beta = \frac{h}{R}$$

Le calcul de l'inversion donne:

$$\left.\begin{array}{c} \|BI'\|.\|BJ'\| = 4R^2 \\ BJ' = \lambda BI' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{4R^2}{BI'^2} = \frac{1}{1+\alpha^2} \approx 1-\alpha^2 \Rightarrow J' = B + \lambda BI' = \begin{cases} x(1-\alpha^2) \\ R(1-2\alpha^2) \end{cases}$$

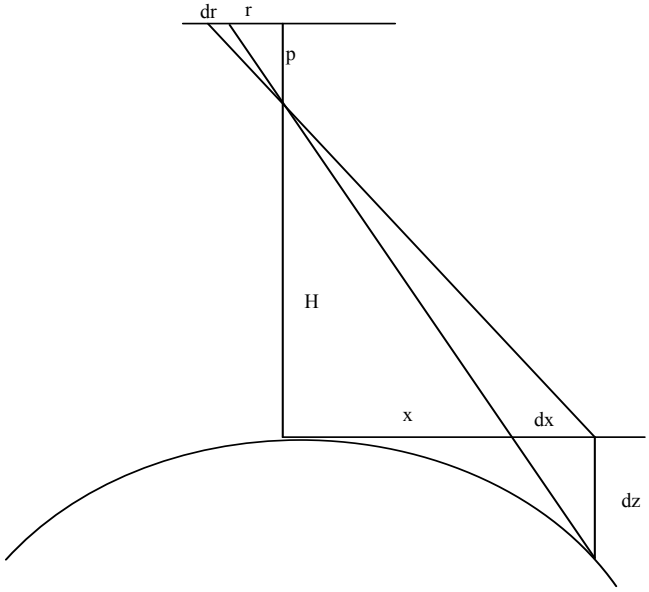
soit (on peut considérer que J-I correspond à une correction à apporter aux coordonnées de I)

$$J = \begin{cases} (1-\alpha^2)(1+\beta)x \\ (1-2\alpha^2)(1+\beta)R \end{cases} \Rightarrow J - I = \begin{cases} (\beta-\alpha^2)x \\ -2\alpha^2 R \end{cases} = \begin{cases} xh/R - x^3/4R^2 \\ -x^2/2R \end{cases}$$

Dans les conditions courantes, le terme de correction altimétrique est de loin le plus significatif. Mais pour des aérotriangulations de grande étendue, les corrections planimétriques peuvent devenir importantes, et ne doivent pas être négligées. Si l'on appuie l'aérotriangulation sur des mesures

de GPS aéroporté, il ne faut pas oublier d'effectuer aussi cette correction sur les coordonnées des sommets, qui devront de plus être corrigées du géoïde.

Enfin, il faut signaler que cette correction est souvent (presque toujours) appliquée de façon beaucoup plus approximative, sous forme d'un déplacement radial de l'image du point. Cette pratique ne se justifie que dans le cas d'appareils analogiques permettant une correction radiale de l'image, tel le Poivilliers D. En effet, elle suppose que l'axe de prise de vue est vertical, et que le terrain est plat et horizontal (pourquoi faire de la photogrammétrie dans ce cas?)



$$dr = dx.\frac{p}{H} = dz.\frac{r}{p}.\frac{p}{H} = dz.\frac{r}{H} = \frac{-x^2}{2R}\frac{r}{H} = -\left(r\frac{H}{p}\right)^2 \frac{r}{2RH} = -\frac{H}{2p^2R}r^3$$

Cette correction polynomiale peut être précalculée connaissant la hauteur de vol et la distance principale. Mais il ne faut surtout pas s'en servir en terrain vallonné, ou dès que l'axe de prise de vue est un peu trop incliné...

2/ Réfraction atmosphérique

Avant de pénétrer dans la caméra photographique, les rayons lumineux traversent l'atmosphère, dont la densité, donc l'indice de réfraction, diminuent avec l'altitude.

H(km)	-1	0	1	3	5	7	9	11
$(n-1)10^6$	306	278	252	206	167	134	106	83

Cette variation de l'indice provoque une courbure des rayons lumineux (orientée vers le bas) dont l'amplitude dépend des conditions atmosphériques (pression et température au moment de la prise de vues), qui ne sont généralement pas connues.

Malgré tout, cette déviation des rayons reste faible par rapport à la précision des mesures photogrammétriques (sauf aux très petites échelles). On pourra donc se contenter de corriger une réfraction correspondant à une atmosphère standard de référence. Pour évaluer l'influence de cette réfraction, il est indispensable de disposer d'un modèle donnant la variation de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude.

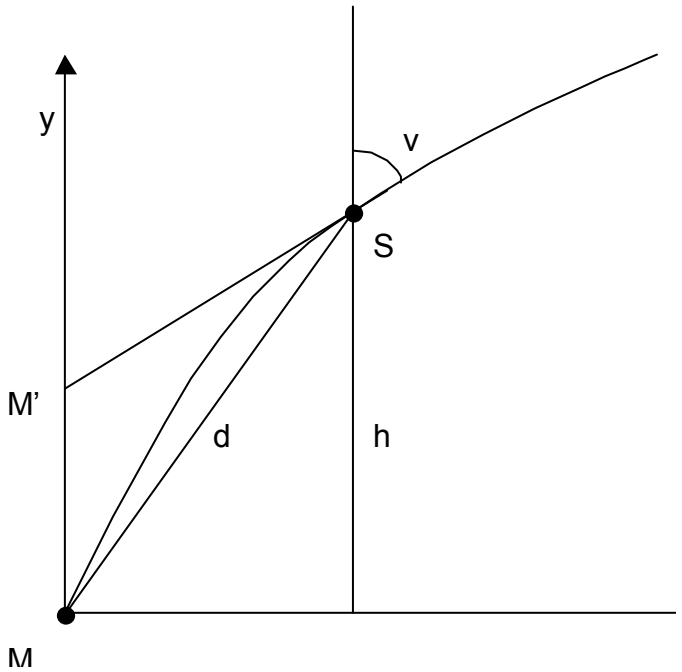
De nombreuses formules existent permettant d'évaluer la variation de la densité de l'air en fonction de l'altitude. Aucune n'est certainement meilleure que l'autre. On pourra par exemple utiliser ici formule publiée par l'OACI (aviation civile) :

$$n = n_0(1 + ah + bh^2) \text{ avec } a = -2{,}560.10^{-8} \quad b = 7{,}5.10^{-13} \quad n_0 = 1.000278$$

ou celle-ci, dont l'intégration est plus simple :

$$n = 1 + ae^{-bh} \text{ avec } a = 278.10^{-6} \quad b = 105.10^{-6}$$

Le calcul de la correction de réfraction peut se faire de la façon suivante :
le rayon lumineux issu de M paraît être issu du point M' situé sur une même verticale, tel que MM' = y. On pourra ainsi modifier l'altitude du point objet M de la correction y pour l 'amener en M'. Cette méthode de calcul a l'avantage de ne pas supposer que l'axe de prise de vues est vertical, et fonctionne en photogrammétrie oblique ou terrestre.



$$dy = \frac{h - h_M}{\sin v.\cos v} dv \text{ , d'où } \quad y = MM' = \int_M^S \frac{h - h_M}{\sin v.\cos v} dv$$

La formule de Descartes nous donne la variation de l'angle de réfraction :

$$n.\sin v = cte \text{ soit } dn \sin v + n \cos v dv = 0 \text{ ou encore } dv = -\frac{dn}{n} tgv$$

.

Dans le cas de la photographie aérienne, on pourra supposer la terre plate, le gradient d'indice est donc toujours vertical (cette approximation n'est pas valable en imagerie spatiale). Le rayon étant peu courbé, on pourra assimiler l'arc et la corde, l'angle v et l'indice de réfraction peuvent être considérés comme constants pour l'intégration.

$$MM' = -\int_M^S \frac{(h - h_M)}{\sin v.\cos v} \frac{\sin v}{\cos v} \frac{dn}{n} = -\int_M^S \frac{(h - h_M)}{\cos^2 v} \frac{dn}{n} = \frac{-1}{\cos^2 v} \int_M^S (h - h_M) \frac{dn}{dh} dh$$

Avec la seconde formule de réfraction, le calcul de l'intégrale donne :

$$\frac{dn}{dh} = -abe^{-bh} \text{ , } \int \frac{dn}{dh} dh = ae^{-bh} = n - 1 \text{ et } \int h \frac{dn}{dh} dh = (h + \frac{1}{b})(n - 1)$$

$$y = -\frac{D^2}{H^2} [\frac{n_S - n_M}{b} + H(n_S - 1)] \text{ avec } D = \|SM\| \text{ et } H = h_S - h_M$$

Pour des photos aériennes au 1/50000 en focale 152mm, cette correction est d'environ 0,20 au centre, et atteint 0,50m en bord de cliché. Elle est bien entendu sensiblement moins importante aux grandes échelles.

Cette formule permet également la correction de réfraction avec des axes de visée obliques ou horizontaux (photogrammétrie terrestre), ce qui n'est bien évidemment pas le cas des formules apportant une correction radiale aux coordonnées cliché. On pourra vérifier que lorsque $h_M \to h_S$,la limite de y est : $y_H = (n_s - 1)\frac{b}{2}D^2$, réfraction d'une visée horizontale.

Lorsque l'avion est pressurisé, le rayon lumineux est réfracté une seconde fois à l'entrée dans la cabine, où la pression est plus élevée qu'à l'altitude de vol (la différence de pression est fonction de l'avion utilisé). On peut de même modéliser cette réfraction de façon analogue à la réfraction atmosphérique (le signe est opposé à la précédente, car le rayon arrive dans un milieu d'indice supérieur).

En notant n_c l'indice de réfraction à l'intérieur de la cabine, *et en supposant que le hublot est horizontal,*

$$dv = -(n_c - n_s)\tan v = -(n_c - n_s)\frac{R}{H}$$

$$dy = -\frac{D^2}{H^2}(n_c - n_S)H$$

En combinant cette équation avec celle de la réfraction atmosphérique, on voit qu'il suffit de remplacer l'altitude du sommet par l'altitude cabine dans le second membre :

$$y = -\frac{D^2}{H^2}[\frac{n_S - n_M}{b} + H(n_c - 1)]$$

Reste à calculer l'indice de réfraction cabine. D'après les aviateurs, la pressurisation conduit à une différence de pression limitée à une valeur $\Delta P_{\max}$ (6 psi, soit 41370 Pa dans le cas des Beechcraft de l'IGN) entre l'intérieur et l'extérieur de l'avion ; en dessous d'une altitude limite, la pression est la pression sol (environ 4300m dans le cas précédent).

L'indice de réfraction est lié à la pression et la température par la relation :

$$N = (n-1)10^6 = 790\frac{P}{T}\ ,\ \text{P en KPa et T en °K}$$

La température décroît avec l'altitude suivant la loi empirique : $T = T_0 - 6{,}5.10^{-3}Z$. Si l'on prend $T_C = T_0 = 298°$, on peut calculer l'indice cabine par :

$$N_C = N_S(1 - 2{,}22.10^{-5}Z_S) + 2{,}696\Delta P$$

On limitera cet indice à l'indice sol (278), dans le cas où l'on est sous l'altitude de pressurisation,
On voit que, dans les condition de vol courantes (prise de vues à 5000m, début de pressurisation à 4300m), cette correction totale est presque opposée à la correction calculée sans pressurisation cabine.

3/ Distorsion de l'optique.

En optique élémentaire (conditions de Gauss : lentilles minces, rayons peu inclinés sur l'axe, optique peu ouverte), tout rayon passant par le centre de l'objectif n'est pas dévié. C'est ce que reproduit la perspective mathématique. Malheureusement, les optiques réelles utilisées en prise de vues photogrammétrique ne remplissent aucune de ces conditions.

Dans le cas des optiques parfaites (dioptres sphériques centrés) le rayon d'entrée, le rayon de sortie, et l'axe de l'optique sont coplanaires. Mais les rayons incident et émergent ne sont pas parallèles. Cet écart de parallélisme constitue la distorsion de l'objectif. C'est une caractéristique permanente

et stable de l'optique, qui peut être mesurée préalablement à la prise de vues, et corrigée lors des calculs de photogrammétrie.

La mesure de cette distorsion peut être réalisée sur un banc optique muni de collimateurs, ou par visée d'un réseau à travers l'objectif. Ces méthodes, assez lourdes et onéreuses, sont utilisées par les fabricants pour fournir les certificats d'étalonnage des caméras aériennes qu'ils produisent. Il est également possible de déterminer la distorsion (ainsi que le centrage et la distance principale) par photographie d'un polygone tridimensionnel de points très bien connus en coordonnées, et par calcul des équations de colinéarité, auxquelles on ajoute des inconnues de distorsion suivant le modèle choisi.

Dans le cas d'un objectif parfait, la distorsion se modélise très bien par une correction symétrique polynomiale radiale autour du point principal de symétrie (intersection de l'axe optique avec le plan du capteur). De plus on peut démontrer aisément que ce polynôme ne contient que des termes impairs. Le terme de premier degré peut être choisi arbitrairement, car il est lié au choix de la distance principale: on le prend souvent nul (distance principale au centre de l'image) ou de façon à ce que la distorsion maximale dans le champ soit la plus faible possible. On se limite généralement au degré 7 (qui est même souvent superflu pour les objectifs courants). La correction à apporter est alors :

$$\Delta r = ar^3 + br^5 + cr^7 \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix} \Delta r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(ar^2 + br^4 + cr^6 \right)$$

Si l'optique ne peut pas être considérée comme parfaite (c'est parfois le cas si l'on tente d'employer des appareils photographiques grand public pour des opérations photogrammétriques), la distorsion peut perdre son caractère radial et symétrique, et nécessite des moyens d'étalonnage et de modélisation beaucoup plus complexes.. De plus, dans le cas des zooms (que l'on évitera…), cette distorsion ne reste pas toujours constante dans le temps en raison des variations de centrage apportées par le déplacement du véhicule pancratique. Toute modélisation devient alors très aléatoire.

4/ Déformations du capteur.

L'équation de la perspective suppose que le capteur est un plan, et que l'on peut y définir un référentiel de mesure permanent. A ce point de vue, il faudra opposer les capteurs photochimiques (émulsion photographique) et les capteurs électroniques (matrices DTC). Ces derniers sont pratiquement indéformables, et l'image qu'ils acquièrent est définitivement stable (en tout cas sur le plan géométrique). Les remarques suivantes s'appliqueront donc uniquement aux capteurs photochimiques.

La planéité de l'émulsion était autrefois obtenue par utilisation de plaques de verre, mais cette solution n'est plus employée, sauf peut-être dans certains systèmes de photogrammétrie terrestre. Elle n'était d'ailleurs pas très satisfaisante. On a pratiquement toujours recours aujourd'hui à l'aspiration sous vide du film sur une plaque de fond de chambre perforée. Cette méthode est très satisfaisante, à condition qu'il n'y ait pas de poussière interposée entre le film et la plaque, ce qui est malheureusement assez difficile à obtenir. Il s'ensuit une déformation locale de l'image, difficile à détecter (sauf dans des zones radiométriquement uniformes, où apparaît un effet d'ombre) et impossible à modéliser.

L'indéformabilité de l'image au cours du temps, si elle s'est améliorée avec l'usage de supports dits "stables", est tout à fait insuffisante pour l'usage des photogrammètres. Des déformations 10 fois supérieures à la précision des mesures nécessaires sont fréquentes. La seule parade efficace est la mesure des coordonnées images de points connus (les repères de fond de chambre) et la modélisation de la déformation par une transformation bidimensionnelle. Cette opération est connue sous le nom d'orientation interne. On choisit habituellement un modèle affine (transformation linéaire générale), qui représente assez bien la partie principale de la déformation. Mais cette déformation n'est ainsi

mesurée que sur le bord de l'image, en un petit nombre de points (8 en général). La prolongation à l'intérieur de l'image est donc d'un assez faible fiabilité.

5/ Modélisation des défauts non quantifiables.

Les principales corrections à apporter au modèle simpliste de la perspective centrale ont été passées en revue. Certaines d'entre-elles peuvent être considérées comme parfaitement connues -la courbure de terre par exemple- d'autres peuvent être calculées approximativement : réfraction, déformation du film, d'autres enfin sont totalement inconnues, la distorsion du hublot par exemple.

Lorsque la reconstitution géométrique précise est indispensable -c'est notamment le cas en aérotriangulation, où le cumul d'erreurs systématiques peut engendrer des imprécisions intolérables- une parade consiste à ajouter à l'équation de colinéarité et à ses termes correctifs, un modèle paramétrique de déformation (souvent polynomial), contenant un petit nombre de paramètres, choisis de façon à représenter au mieux l'influence des défauts non directement modélisables. Ces inconnues supplémentaires inconnues de systématisme a posteriori) seront résolues simultanément avec les inconnues principales du système photogrammétrique, que sont les coordonnée des points terrain, les sommets de prise de vue, et la rotations des images. Cette technique permet habituellement un gain de 30 à 40% sur la précision altimétrique de l'aérotriangulation.

E/ Quelques règles pratiques.

Les règles de bonne mise en œuvre de la photogrammétrie aérienne sont connues depuis plusieurs décennies, et on se contentera donc ici d'en rappeler l'essentiel. D'ailleurs, les variables sur lesquelles on peut intervenir sont peu nombreuses. Elles découlent pour l'essentiel de la précision que l'on cherche à atteindre, qui peut être spécifiée dans le cahier des charges, ou se déduire de l'échelle du levé (même si celui-ci est numérique, on peut lui attribuer une échelle correspondant à sa précision, qui est conventionnellement de 0,1 mm à l'échelle).

La pratique montre que l'ensemble des erreurs qui se cumulent au cours du processus photogrammétrique limite sa précision -dans des travaux courants- à environ 15 à 20 microns sur l'image (sur des points bien définis) pour chacune des deux coordonnées planimétrique. Ce chiffre peut être sensiblement amélioré (jusqu'à 2 à 3μ) en choisissant des modes opératoires plus contraignants (et simultanément plus onéreux). Pour l'altimétrie, ce chiffre doit être grosso-modo divisé par le rapport entre la base (distance entre les points de vue) et l'éloignement (de ces points de vue à l'objet photographié). Ce rapport dépend directement de l'angle de champ choisi pour la caméra : plus le champ est large, plus ce rapport sera élevé, plus la précision altimétrique sera proche de la précision planimétrique.

A titre d'exemple, on trouvera ci-dessous un tableau récapitulant les valeurs caractéristiques des caméras aériennes les plus courantes (en format 24x24cm) avec des valeurs de base standard (recouvrement de 55%) :

Focale	88mm	152mm	210mm	300mm
Angle de champ	120°	90°	73°	55°
B/H	1,3	0,66	0,48	0,33
Hauteur de vol (1/10000)	880 m	1520 m	2100 m	3000 m
Précision plani (1/10000)	20 cm	20 cm	20 cm	20 cm
Précision alti (1/10000)	15 cm	30 cm	40 cm	60 cm

Connaissant la précision demandée au levé, il est alors très simple de déterminer l'échelle de prise de vue. Le choix de la focale sera guidé par la considération suivante : plus la focale est longue,

plus l'altitude de vol sera élevée, plus les parties cachées seront faibles (essentiellement les pieds des immeubles en ville, sinon le sol complet des rues), mais simultanément plus la précision altimétrique sera dégradée, et plus l'influence radiométrique de l'atmosphère sera gênante.

En pratique, on utilisera prioritairement la focale de 152mm. La focale plus courte sera réservée aux très petites échelles, pour lesquelles l'altitude de vol peut constituer une limitation (le gain en précision altimétrique est en réalité tout à fait théorique, dans la mesure où la médiocre qualité des optiques fait perdre ce que l'on avait gagné en géométrie). Les focales longues seront réservées la plupart du temps aux levés orthophotographiques en zone urbaine, dans lesquels la perte de qualité altimétrique n'est pas un gros handicap. Dans le cas de photographie en couleurs, il faudra néanmoins prendre garde à l'augmentation du voile atmosphérique, qui aura surtout pour conséquence pratique de limiter le nombre de jours de prise de vues disponibles. Une autre façon (moins économique) de pallier le problème des parties cachées est d'utiliser une caméra de focale normale, en choisissant des recouvrements plus importants : on peut ainsi concilier une bonne précision altimétrique, un faible voile, et des déformations dues au sursol acceptables.