Institut National de l'Information Géographique et Forestière
École Nationale des Sciences Géographiques

Propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère terrestre



Cycle des Ingénieurs de Première Année

par

Jonathan CHENAL

Ingénieur des Travaux Géographiques et Cartographiques de l'État

Service de Géodésie et Nivellement, Institut National de l'Information Géographique et Forestière,
73 Avenue de Paris, 94165 Saint-Mandé CEDEX, France
Mél : Jonathan.Chenal@ign.fr ; Tél : 01 43 98 80 00 + 73 63

Document réalisé avec LaTeX 2ε

Sommaire

Sommaire i

Avant-propos 1

Introduction 2

I Outils fondamentaux de l'électromagnétisme 3

1 Analyse vectorielle 4

2 Postulats de l'électromagnétisme 11

II Propriétés des ondes électromagnétiques 23

3 Ondes électromagnétiques 24

4 Radiométrie 46

III Interactions des ondes électromagnétiques avec la matière 60

5 Le corps noir : approche quantique de l'émission et de l'absorption des ondes électromagnétiques 61

6 Électromagnétisme des milieux 78

7 Diffusion et transfert radiatif 96

IV Ondes électromagnétiques dans l'atmosphère 111

8 Propriétés de l'atmosphère terrestre 112

9 Réfraction et tranfert radiatif atmosphérique 130

10 Observer dans et à travers l'atmosphère terrestre 157

Conclusion 175

V Annexes 176

11 Exercices 177

Bibliographie 213

Table des matières 216

Avant-propos

Ce document est le support du cours de Propagation des Ondes Électromagnétiques dans l'Atmosphère Terrestre destiné aux étudiants de l'École Nationale des Sciences Géographiques. Il fait suite aux cours donnés sur le même thème par Olivier Bock, Michel Kasser et Pierre Bosser ; j'adresse à ce dernier mes sincères remerciements pour m'avoir proposé de lui succéder.

Ce cours est d'abord et avant tout un cours de physique du rayonnement, qui prend pour base l'électromagnétisme classique décrit par les équations de Maxwell, et jette les bases de l'électromagnétisme quantique nécessaires à la compréhension des principaux phénomènes abordés. L'accent a été mis sur les démonstrations des résultats fondamentaux, qui permettent d'ancrer solidement les concepts sous-jacents aux notions abordées. Les applications traitées touchent, dans le cadre de ce document, à l'astronomie, la géodésie, la topométrie et la télédétection, qui concernent directement les étudiants de l'ENSG, tout en permettant de les élargir à d'autres domaines. Ainsi, tous les phénomènes liés à la propagation du rayonnement dans l'atmosphère ne sont pas abordés ici ; le lecteur prolongera avantageusement sa lecture avec [Boithias, 1983].

En revanche, ce cours n'est pas un cours sur la technologie des capteurs ni sur le traitement des signaux ou des images ; il constitue toutefois une base théorique indispensable, sans être exhaustive, pour appréhender ces aspects dans de bonnes conditions, dans des cours qui leur seront spécialement dédiés.

Le contenu de ce cours peut être librement utilisé, sous réserve de le citer comme suit :

Chenal, J. (2018), *Propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère terrestre*, Cycle des ingénieurs de première année, Institut national de l'information géographique et forestière, École nationale des sciences géographiques, Champs-sur-Marne.

Introduction

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère terrestre est d'un intérêt considérable pour la compréhension de phénomènes atmosphériques visibles par tout un chacun, mais aussi pour toutes les disciplines scientifiques basées sur leur observation, ainsi que pour les technologies appuyées sur leur utilisation. L'étendue du spectre électromagnétique et la structure moléculaire des gaz de l'atmosphère donnent lieu à de multiples phénomènes qu'il faut connaître et comprendre.

Nous rappellerons donc d'abord l'origine des champs électromagnétiques, puis les lois fondamentales de l'électromagnétisme, avant d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Après la caractérisation microscopique des milieux, nous y examinerons les conditions de propagation des ondes électromagnétiques. Les propriétés physique de l'atmosphère seront présentées, de façon à en déduire les phénomènes électromagnétiques dont elle est le siège.

Première partie

Outils fondamentaux de l'électromagnétisme

Chapitre 1

Analyse vectorielle

Les lois de l'électromagnétisme requièrent des outils mathématiques, dont la description est du ressort de l'« analyse vectorielle », pour être exprimées, à l'instar des lois de la mécanique des fluides ou de la physique des ondes. Ce chapitre leur est consacré.

1.1 Notion de champ

1.1.1 Définition

En physique, on appelle **champ** la description d'une grandeur physique distribuée spatio-temporellement. Néanmoins, même si un champ varie dans le temps, les outils de l'analyse vectorielle décrits dans ce chapitre ne s'appliquent pour la plupart qu'à la description spatiale des champs.

1.1.2 Champ scalaire

Un **champ scalaire** décrit une grandeur physique représentée par un seul nombre en tout point de l'espace-temps. Des champs de pression, de température, de potentiel, en sont des exemples.

1.1.3 Champs vectoriel

Un **champ vectoriel** décrit une grandeur physique représentée par un vecteur en tout point de l'espace-temps. Des champs magnétiques, de vitesse, de gravitation, en sont des exemples.

Dans un champ vectoriel, on appelle ligne de champ une ligne en tout point tangente au vecteur champ.

1.1.4 Uniformité et constance

À l'instant t, un champ est **uniforme** s'il prend la même valeur en tout point où il est défini.

En $\overrightarrow{r}$, un champ est **constant** s'il conserve la même valeur à tout instant.

1.2 Gradient

1.2.1 Définition

Soit $f(\overrightarrow{r}, t)$ un champ scalaire, réduit à $f(\overrightarrow{r})$ pour ce qui concerne sa description spatiale à un instant donné. On appelle **gradient** de f le champ vectoriel tel que la différentielle df du champ f s'écrive en $(\overrightarrow{r})$:

$$df(\overrightarrow{r}) \quad = \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r}$$

où $d\overrightarrow{r}$ est un déplacement élémentaire.

1.2.2 Propriété topologique

Soit une surface de l'espace telle que :

$$f(\overrightarrow{r},t) \quad = \quad A(t)$$

c'est-à-dire de valeur uniforme dans l'espace (mais pas forcément constante). Alors le long de cette surface :

$$\begin{aligned} df(\overrightarrow{r},t) &= 0 \\ \iff \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} &= 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, les surfaces d'un champ scalaire uniforme ($df = 0$) sont orthogonales aux lignes du champ vectoriel gradient associé à ce champ scalaire.

1.2.3 Vecteur dérivant d'un potentiel scalaire

On dit qu'un champ vectoriel $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r})$ dérive d'un potentiel scalaire $f(\overrightarrow{r})$ si :

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) \quad = \quad \pm\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\overrightarrow{r})$$

1.2.4 Expression en coordonnées cartésiennes

Si nous écrivons la différentielle de f en coordonnées cartésiennes (en omettant la composante temps, qui n'intervient pas ici) :

$$df \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Mais, par ailleurs, le déplacement élémentaire s'écrit, dans la base $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$:

$$d\overrightarrow{r} \quad = \quad dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

De même, on peut décomposer le vecteur gradient sur cette base :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \quad = \quad \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_x \overrightarrow{u_x} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_y \overrightarrow{u_y} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_z \overrightarrow{u_z}$$

En rappelant la définition du gradient, on peut la réécrire des deux formes ci-dessus :

$$\begin{aligned} df(\overrightarrow{r}) &= \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} \\ \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_x dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_y dy + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_z dz \end{aligned}$$

Et donc, en identifiant terme à terme :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_z &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

on aboutit à la définition du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \quad = \quad \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

1.3 Divergence

1.3.1 Définition

La définition de la **divergence** repose sur le théorème de Green [1]-Ostrogradski [2], que nous admettons :

Théorème (Green-Ostrogradski) — *Soit $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ un champ vectoriel défini dans l'espace. Il existe un unique champ scalaire, appelé divergence de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$, noté div $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ tel que, pour tout volume V délimité par une surface Σ orientée par sa normale sortante, le flux de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ à travers Σ est égal à l'intégrale triple de la divergence de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ sur le volume V :*

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{dS_{ext}} = \iiint_{V} div\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{r}) d\tau$$

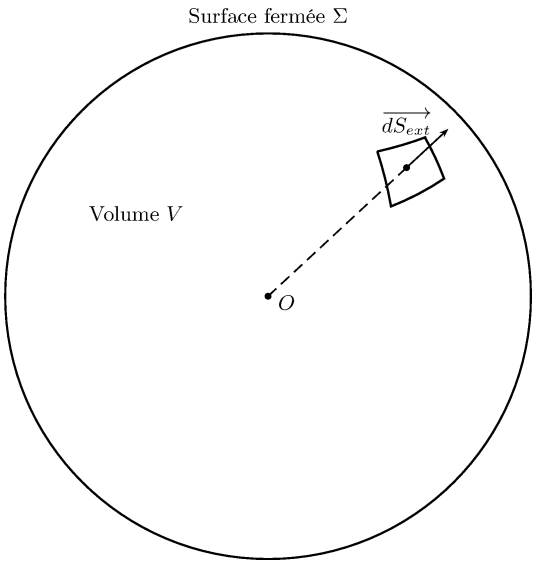


Figure 1.1 – Une surface orientée délimitant un volume.

La divergence est donc initialement définie indépendamment de tout système de coordonnées. On voit que la divergence est une mesure infinitésimale du flux sortant du champ de vecteur local à travers une surface fermée entourant le point où on l'exprime ; ce flux est positif si le champ de vecteur diverge — d'où son nom.

1.3.2 Expression en coordonnées cartésiennes

Si on considère un volume élémentaire $d\tau = dx\ dy\ dz$ (ici $= V$) dont un sommet est en $\overrightarrow{r}$, auquel on applique le théorème de Green-Ostrogradski, en calculant d'abord :

$$\begin{aligned} \iiint_{V} \text{div}\ \overrightarrow{f}\, d\tau &= \text{div}\ \overrightarrow{f}\, d\tau \\ &= \text{div}\ \overrightarrow{f}\, dx\ dy\ dz \end{aligned}$$

On doit ensuite exprimer l'intégrale de surface, égale à la somme des aires des six côtés, ici considérés par les paires de côtés se faisant face :

1. George Green, 1793 – 1841.
2. Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradsky, 1801 – 1862.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{dS} &= \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (-dy\ dz\ \overrightarrow{u_x}) + \overrightarrow{f}(x+dx,y,z) \cdot (dy\ dz\ \overrightarrow{u_x}) \\
&\quad + \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (-dx\ dz\ \overrightarrow{u_y}) + \overrightarrow{f}(x,y+dy,z) \cdot (dx\ dz\ \overrightarrow{u_y}) \\
&\quad + \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (-dx\ dy\ \overrightarrow{u_z}) + \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (dx\ dy\ \overrightarrow{u_z}) \\
&= (f_x(x+dx,y,z) - f_x(x,y,z))dy\ dz + (f_y(x,y+dy,z) - f_y(x,y,z))dx\ dz \\
&\quad + (f_z(x,y,z+dz) - f_z(x,y,z))dx\ dy \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x}dx\ dy\ dz + \frac{\partial f_y}{\partial y}dx\ dy\ dz + \frac{\partial f_z}{\partial z}dx\ dy\ dz
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{div}\ \overrightarrow{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

1.4 Rotationnel

1.4.1 Définition

La définition du **rotationnel** repose sur le théorème de Stokes[3], que nous admettons :

Théorème (Stokes) — *Soit $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ un champ vectoriel défini dans l'espace. Il existe un unique champ vectoriel, appelé rotationnel de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$, noté $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ tel que, pour toute surface S appuyée sur un contour C fermé, orientés de façon cohérente, la circulation de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ le long de C est égal au flux du rotationnel de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r})$ à travers la surface S :*

$$\oint_C \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dS}$$

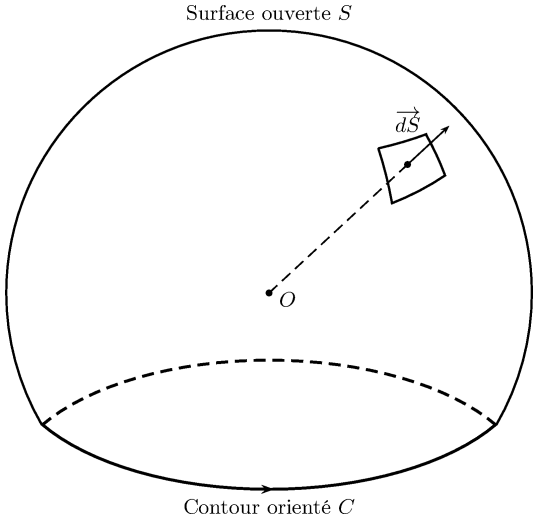


Figure 1.2 – Un contour orienté appuyant une surface ouverte.

Le rotationnel est donc défini indépendamment de toute base. Il est une mesure de la circulation d'un champ de vecteur local le long d'une courbe fermée entourant le point où on l'examine ; il est positif si le champ de vecteur semble tourner — d'où son nom.

1.4.2 Expression en coordonnées cartésiennes

Si on considère un contour élémentaire rectangulaire C de côtés dx et dy délimitant une surface S plane, orientée par $\overrightarrow{u_z}$, auquel on applique le théorème de Stokes, en calculant d'abord :

3. George Gabriel Stokes, 1819 – 1903.

$$\begin{aligned}\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dS} &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} \cdot (dx\ dy\ \overrightarrow{u_z}) \\ &= \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f}\right)_z dx\ dy\end{aligned}$$

On doit ensuite exprimer l'intégrale de contour, égale à la somme des quatre contributions des côtés, ici considérés par les paires de côtés se faisant face :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \overrightarrow{f}(x+dx,y,z) \cdot (dy\ \overrightarrow{u_y}) + \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (-dy\ \overrightarrow{u_y}) \\ &\quad + \overrightarrow{f}(x,y,z) \cdot (dx\ \overrightarrow{u_x}) - \overrightarrow{f}(x,y+dy,z) \cdot (dx\ \overrightarrow{u_x}) \\ &= (f_y(x+dx,y,z) - f_y(x,y,z))dx\ dy + (f_x(x,y,z) - f_x(x,y+dy,z))dx\ dy \\ &= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Ainsi la composante z du rotationnel s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f}\right)_z = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Les composantes x et y s'obtiennent par permutation circulaire, si bien que le rotationnel s'exprime, en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}\end{array}\right.$$

1.5 Laplacien scalaire

Alors que le gradient, la divergence et le rotationnel sont des opérateurs de premier ordre, le **laplacien scalaire** d'un champ scalaire f est un opérateur scalaire de deuxième ordre, défini par :

$$\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f\right)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression du laplacien scalaire est immédiate :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.6 Laplacien vectoriel

Le **laplacien vectoriel** est un opérateur vectoriel de deuxième ordre défini par :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\ \overrightarrow{f}\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f}\right)$$

En coordonnées cartésiennes, chaque composante du laplacien vectoriel du vecteur est égale au laplacien scalaire de la composante du vecteur :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{f} = \left|\begin{array}{l}\Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z\end{array}\right.$$

1.7 D'Alembertien

Le **d'Alembertien**[4] couple deux opérateurs du deuxième degré : le laplacien, et la dérivée temporelle seconde. Contrairement au laplacien, cependant, on ne distinguera pas ici le d'Alembertien scalaire et vectoriel en notation, même si, en toute rigueur, deux définitions seraient requises pour écrire rigoureusement le d'Alembertien. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Box f &\equiv \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ \Box \overrightarrow{f} &\equiv \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{f}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Naturellement, à tout d'Alembertien est associée une célérité c.

1.8 Nabla

On appelle **nabla** l'opérateur symbolique suivant, défini uniquement en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Si bien que, dans ce système de coordonnées, on peut réécrire les opérateurs déjà vus ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \overrightarrow{\nabla} f \\ \text{div}\ \overrightarrow{f} &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{f} \\ \Delta f &= \overrightarrow{\nabla}^2 f \end{aligned}$$

Ceci signifie que les écritures de ces opérateurs ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes ; pour les exprimer dans d'autres systèmes de coordonnées, il faut repartir de leur définition.

1.9 Autres relations

Nous ne démontrons pas ces relations, qui s'obtiennent chacune après quelques lignes de calculs, en s'appuyant sur la propriété de linéarité des opérateurs vectoriels.

1.9.1 Produits de deux champs

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) &= f\ \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f \\ \text{div}\ (f\overrightarrow{g}) &= f\ \text{div}\ \overrightarrow{g} + \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ (f\overrightarrow{g}) &= f\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{g} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \overrightarrow{g} \\ \text{div}\left(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}\right) &= \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} - \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}\right) &= (\text{div}\ \overrightarrow{g})\ \overrightarrow{f} - \left(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{g} - \left(\text{div}\ \overrightarrow{f}\right)\overrightarrow{g} + \left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}\right) &= \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{g} + \left(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{g} + \overrightarrow{g} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{f} + \left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{f} \end{aligned}$$

4. De Jean Le Rond d'Alembert, 1717 – 1783.

1.9.2 Opérations identiquement nulles

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{f}\right) &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f\right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ces relations signifient, respectivement, que :

— le rotationnel d'un champ vectoriel ne diverge pas : son flux à travers une surface fermée est toujours nul ;
— le gradient d'un champ scalaire ne tourne pas : sa circulation le long d'une courbe fermée est toujours nulle.

Chapitre 2

Postulats de l'électromagnétisme

Nous examinons désormais les champs électriques et magnétiques dans le vide, lorsque les phénomènes qui les génèrent ne sont pas constants ou uniformes.

2.1 Hypothèses fondamentales

2.1.1 La conservation de la charge

2.1.1.1 Définitions

Nous supposons un système de N porteurs de charges i, ayant chacun une densité volumique de charges ρ_i et une vitesse $\overrightarrow{v_i}$; on appelle **vecteur densité de courant** [Olivier *et al.*, 2000] :

$$\overrightarrow{j} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \overrightarrow{v_i}$$

On appelle **intensité** I_S la quantité de charge δq traversant la surface orientée S pendant le temps dt :

$$I_S = \frac{\delta q}{dt}$$

2.1.1.2 Relation entre densité de courant et intensité

Considérons un élément de surface orienté $\overrightarrow{dS}$; on considère aussi un élément de volume $d\tau$, dans lequel les porteurs de charge i ont une vitesse d'ensemble $\overrightarrow{v_i}$. Pendant dt, les porteurs de charge i contenus dans $d\tau$ se déplacent d'un vecteur $\overrightarrow{v_i}dt$. Ceux qui franchissent la surface $\overrightarrow{dS}$ sont donc contenus dans le volume défini par la base $\overrightarrow{dS}$ et la génératrice $\overrightarrow{v_i}dt$, et de volume $\overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{v_i}dt$ (voir figure 2.1 page suivante). Si bien que la charge qui traverse $\overrightarrow{dS}$ pendant dt est [Olivier *et al.*, 2000] :

$$\delta^2 q_i = \rho_i \overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{v_i} dt$$

Si l'on somme sur l'ensemble des porteurs :

$$\begin{aligned} \delta^2 q &= \sum_{i=1}^{N} \delta^2 q_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \rho_i \overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{v_i} dt \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\rho_i \overrightarrow{v_i}) \cdot \overrightarrow{dS} dt \end{aligned}$$

En intégrant sur la surface S, on obtient la charge élémentaire δq la traversant pendant dt :

$$\begin{aligned} \delta q &= dt \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS} \\ \text{puis :} \quad I_S &= \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS} \end{aligned}$$

L'intensité électrique est donc le flux du vecteur densité de courant à travers une surface ouverte orientée.

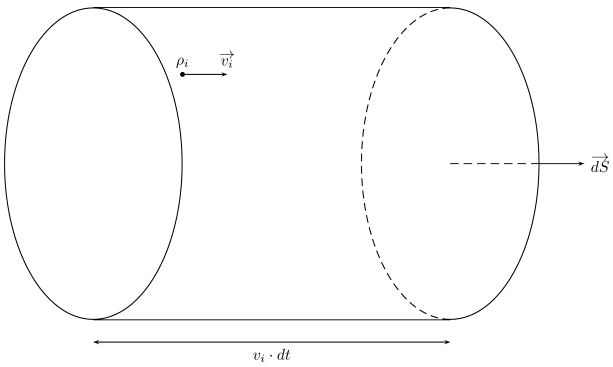


Figure 2.1 – Un tube de courant.

2.1.1.3 Équation fondamentale de la conservation de la charge

Si on considère le volume élémentaire $d\tau$ dont on fait un bilan de charges, alors à partir de la définition de la divergence, on peut facilement établir que la variation infinitésimale de la quantité de charge pendant dt, due aux échanges à travers la surface délimitant $d\tau$, vaut [Olivier *et al.*, 2000] :

$$\delta^2 q = -\text{div } \overrightarrow{j}\, d\tau dt$$

Si on examine maintenant l'évolution temporelle de charge dans $d\tau$ entre deux instants infiniment proches t et $t + dt$, la différentielle de la quantité de charge vaut :

$$\begin{aligned} d^2 q &= dq(t + dt) - dq(t) \\ &= \rho(d\tau, t + dt)d\tau - \rho(d\tau, t)d\tau \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt \end{aligned}$$

Écrivant l'égalité des variations de charge calculées de deux façons différentes, nous obtenons [1] :

$$\begin{aligned} d^2 q &= \delta^2 q \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt &= -\text{div } \overrightarrow{j}\, d\tau dt \\ \text{puis :} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \overrightarrow{j} &= 0 \end{aligned}$$

que l'on appelle **équation de la conservation de la charge** [2].

1. On a noté δq la variation infinitésimale de la charge, et dq sa différentielle.
2. Il existe des relations semblables pour la conservation de la masse ou de l'énergie.

2.1.2 Les forces électromagnétiques

2.1.2.1 La force de Lorentz

Soit une particule de charge q plongée dans un champ électromagnétique $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en $\overrightarrow{r}$ à l'instant t[3], et animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$. Cette particule subit une force :

$$\overrightarrow{F}_{\overrightarrow{E},\overrightarrow{B}\to q} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

qui est la **force de Lorentz**[4]. Ainsi la force subie par une charge dans un champ électromagnétique est découplée entre la part électrique et la part magnétique, et celle-ci ne se manifeste que si la charge est en mouvement.

2.1.2.2 La force de Laplace

Soit un circuit conducteur parcouru par un courant de densité $\overrightarrow{j}$ plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Chaque élément volumique de courant $d\tau$ est soumis à une force :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B} d\tau$$

qui est la **force de Laplace**[5]. Ainsi la force de Laplace est insensible au champ électrique, mais dépend de la densité de courant et du champ magnétique. Il est immédiat de constater que la force de Laplace n'est qu'un cas particulier de la force de Lorentz : elle postule nul le champ électrique, est volumique et touche à une densité de courant ; en effet, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{\overrightarrow{E},\overrightarrow{B}\to q} &= q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \\
\Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} &= \frac{dq}{d\tau}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \qquad \text{hyp. } \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\
&= \rho\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \\
&= \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B} \qquad \text{Laplace}
\end{aligned}$$

2.1.3 Les équations de Maxwell

2.1.3.1 Formulation des équations de Maxwell

Les **équations de Maxwell**[6] décrivent le comportement d'un champ électro-magnétique en présence de charges et courants électriques. Les équations de Maxwell, qui ne fit pas étalage de ses talents qu'en électromagnétisme, mais aussi en théorie cinétique des gaz, sont posées *a priori* et vérifiées par l'expérience[7]. Maxwell écrivit d'abord vingt équations à vingt inconnues, puis huit ; la forme que nous connaissons a été formulée par Heaviside[8].

a) Maxwell-Gauss La première équation est l'équation de **Maxwell-Gauss**[9] :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.1}$$

3. Par souci d'allègement des notations, nous omettons de noter la dépendance spatiale et temporelle des grandeurs locales : force, vitesse, champs, etc. Ainsi on a : $\overrightarrow{E} \equiv \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t)$; il en est de même pour $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{j}$ puis, plus loin, $\overrightarrow{A}$, V, $\overrightarrow{P}$, par exemple.

4. Hendrik Antoon Lorentz, 1853 – 1928.

5. Pierre-Simon de Laplace, 1749 – 1827.

6. James Clerk Maxwell, 1831 – 1879.

7. Historiquement, ce sont plutôt les expériences de la physique, et notamment celle d'Œrstedt, qui ont amené les scientifiques de l'époque à progressivement construire ces équations pour en rendre compte.

8. Oliver Heaviside, 1850 – 1925.

9. Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855.

où $\overrightarrow{E}$ est le champ électrique, ρ la charge volumique (en $C \cdot m^{-3}$). Ces deux grandeurs sont fonctions de la position $\overrightarrow{r}$ et du temps t : $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t)$ et $\rho(\overrightarrow{r}, t)$. ϵ_0 est une constante fondamentale de la physique appelée permittivité diélectrique du vide :

$$\epsilon_0 \quad = \quad 8,8554187817 \cdot 10^{-12}\ F \cdot m^{-1}$$

L'équation de Maxwell-Gauss dit que le champ électrique diverge, autrement dit que son flux à travers une surface fermée n'est pas nul. C'est aussi une relation qui définit la topologie du champ électrique au regard de ce qui lui donne naissance.

b) Maxwell-Thomson La seconde équation est celle de **Maxwell-Thomson**[10] :

$$\text{div}\ \overrightarrow{B} \quad = \quad 0 \tag{2.2}$$

avec $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique. L'équation de Maxwell-Thomson dit que le champ magnétique ne diverge pas, autrement dit que son flux à travers une surface fermée est nul.

c) Maxwell-Faraday Nous avons ensuite deux équations postulant le couplage des variations spatio-temporelles des deux champs. La première est l'équation de **Maxwell-Faraday**[11] :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \quad = \quad -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

Cette relation est la première à coupler le champ électrique au champ magnétique : le champ électrique ne tourne que si le champ magnétique existe et varie dans le temps ; et réciproquement.

d) Maxwell-Ampère La seconde équation postulant le couplage des variations spatio-temporelles des deux champs est celle de **Maxwell-Ampère**[12] :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} \quad = \quad \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \tag{2.4}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, et vaut exactement :

$$\mu_0 \quad = \quad 4\pi \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2}$$

et résulte de la définition de l'ampère[13]. Le deuxième terme du membre de droit est appelé « courant de déplacement » car il fait apparaître une grandeur appelée « déplacement électrique » $\epsilon_0 \overrightarrow{E}$ (voir partie **??** page ??). Cette relation décrit le couplage entre champ magnétique et électrique, et avec la source du champ magnétique : le champ magnétique ne tourne que s'il existe un courant électrique ou s'il existe un champ électrique variable dans le temps ; et réciproquement.

2.1.3.2 Cohérence des équations de Maxwell avec la conservation de la charge

Si l'on part de l'équation de Maxwell-Gauss, que l'on dérive par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \text{div}\ \overrightarrow{E} \quad &= \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad &= \quad \epsilon_0 \text{div}\ \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \\ (+\text{div}\ \overrightarrow{j}) \qquad 0 \quad &= \quad \epsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \overrightarrow{j} \right) \end{aligned}$$

10. William Thomson, Lord Kelvin, 1824 – 1907.
11. Michael Faraday, 1791 – 1867.
12. André Marie Ampère, 1775 – 1836.
13. Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable, et placés à une distance d'un mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

La transformation du membre de gauche est obtenue en invoquant la conservation de la charge. Or on sait que les propriété de la divergence et du rotationnel permettent d'écrire que :

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} \quad = \quad 0$$

Si bien qu'en multipliant la relation obtenue plus haut par μ_0, et en utilisant celle-ci, on peut simplifier par l'opérateur divergence et obtenir :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} \quad = \quad \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right)$$

qui est précisément l'équation de Maxwell-Ampère, ce qui prouve la cohérence des équations de Maxwell avec la conservation de la charge. On peut par ailleurs montrer que c'est l'introduction du courant de déplacement $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ qui rend possible cette cohérence. Écrivons donc délibérément l'équation de Maxwell-Ampère sans ce terme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} &= \mu_0\, \vec{j} \\ \Rightarrow \text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} &= \mu_0 \text{div}\ \vec{j} \\ \iff 0 &= \text{div}\ \vec{j} \end{aligned}$$

ce qui est manifestement contraire à l'équation de la conservation de la charge, et invalide donc l'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère sans le terme de courant de déplacement. Ou alors, on peut négliger le courant de déplacement à l'unique condition que la densité de courant ne diverge pas (*i.e.* il n'existe pas d'accumulation locale ou de « trou » local dans l'écoulement des porteurs de charge).

2.1.3.3 Cohérence des équations de Maxwell entre elles

Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère manifestent déjà leur cohérence entre elles à travers la cohérence qu'elles impliquent avec la conservation de la charge. Examinons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \text{div}\ \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Les propriétés des opérateurs divergence et rotationnel implique que ce membre est nul ; or l'équation de Maxwell-Thomson est telle que sa dérivée temporelle est également nulle, ce qui confirme la cohérence de ces deux équations.

2.2 Forme intégrale des équations de Maxwell et conséquences

2.2.1 Théorème de Gauss

Si on intègre sur un volume fermé V l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div}\ \vec{E} d\tau &= \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \\ &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

où q_{int} est la charge intérieure au volume V. Le théorème de Green-Ostrogradsky nous amène finalement à :

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad = \quad \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec Σ la surface fermée entourant V. Cette relation s'appelle le **théorème de Gauss**.

2.2.2 Conservation du flux magnétique

L'équation de Maxwell-Thomson div $\overrightarrow{B} = 0$ prend la forme suivante par le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

qui signifie que **le flux du champ magnétique à travers une surface fermée se conserve**.

En particulier, si on considère deux surfaces S_1 et S_2 appuyées sur le même contour C, orientées sortantes, alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \iint_{S_2} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS_2} - \iint_{S_1} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS_1} \\ \iff \iint_{S_2} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS_2} &= \iint_{S_1} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS_1} \end{aligned}$$

Autrement dit, la conservation du flux du champ magnétique signifie que celui-ci ne dépend pas de la surface à travers laquelle on l'examine, dès lors qu'elles sont toutes appuyées sur le même contour.

2.2.3 Loi de Faraday : l'induction

Nous intégrons désormais l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\partial\overrightarrow{B}/\partial t$ sur une surface S ouverte appuyée sur un contour C fermé et orienté ; à l'aide du théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} &= -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} \end{aligned}$$

En supposant que la surface S est fixe dans le temps, on peut sortir l'opérateur de dérivation temporelle de l'intégrale et écrire :

$$\oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}\right)$$

En notant ϕ le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers S et e la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de C, grandeur encore appelée force électromotrice, nous obtenons la **loi de l'induction**, dite loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Physiquement, cette équation signifie que la force électromotrice induite tend, par ses conséquences, à s'opposer à sa propre cause, à savoir la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit. Autrement dit : **un champ magnétique variable engendre un champ électrique**.

2.2.4 Théorème d'Ampère

Enfin, en intégrant l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface S ouverte appuyée sur un contour C fermé et orienté et en utilisant le théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$= \iint_S \mu_0 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_S \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\text{d'où :} \quad \oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_S + \iint_S \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

où I_S est l'intensité du courant de densité $\overrightarrow{j}$ à travers la surface S.

Ce théorème signifie qu'**un courant et, ou, un champ électrique variable engendrent un champ magnétique**.

2.3 Passage d'un champ électromagnétique à travers une surface

On examine les modifications connues par les champs électrique et magnétique à la traversée d'une nappe de charges et/ou de courants électriques.

2.3.1 Charges et courants surfaciques

Soit une surface S quelconque d'épaisseur a mesurée le long de sa normale orientée par le vecteur $\overrightarrow{n}$. On assimile localement la surface S à son plan tangent, de normale $\overrightarrow{u_z}$, auquel on associe un système de coordonnées cartésiennes ; le plan tangent est donc défini par les vecteurs $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Le demi-plan de l'espace tel que $z > 0$ est le milieu 2, et le demi-plan de l'espace tel que $z < 0$ est le milieu 1 ; le vecteur $\overrightarrow{n_{12}}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et dirigé du milieu 1 au milieu 2, donc des z négatifs vers les z positifs ; il est donc égal à $\overrightarrow{u_z}$.

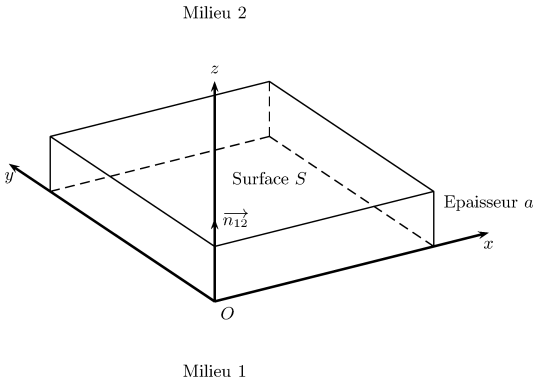


Figure 2.2 – Paramétrage cartésien d'un plan d'épaisseur a séparant deux milieux.

2.3.1.1 Charges surfaciques

On considère que des charges électriques se trouvent dans le volume défini par la surface S d'épaisseur a. En tout point (x, y) de la surface, on appelle **densité surfacique de charges** σ la densité (volumique) de charges $\rho(x, y, z, t)$ intégrée sur l'épaisseur a de la surface [Labarthe, 2005] :

$$\sigma(x, y, t) = \int_0^a \rho(x, y, z, t) dz$$

2.3.1.2 Courants surfaciques

On considère ici que des courants volumiques circulent dans le volume défini par la surface S d'épaisseur a. En tout point (x, y) de la surface, on appelle **densité surfacique de courant** $\overrightarrow{j_s}$ la densité (volumique) de courant $\overrightarrow{j}$ intégrée sur l'épaisseur a de la surface [Labarthe, 2005] :

$$\overrightarrow{j_s}(x, y, t) = \int_0^a \overrightarrow{j}(x, y, z, t) dz$$

2.3.2 Relations de passage des composantes normales

La densité surfacique de charge est une grandeur finie, en dépit de sa définition correspondant à la limite où l'épaisseur a tend vers zéro, et où la densité volumique peut prendre localement des valeurs très élevées. C'est par ailleurs la densité surfacique de charge qui influe sur les composantes normales des champs électrique et magnétique.

2.3.2.1 Composante normale du champ électrique

Si on écrit l'équation de Maxwell-Gauss sous une forme développée et en coordonnées cartésiennes [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned}
\text{div } \overrightarrow{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\iff \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\Rightarrow \underbrace{\int_0^a \left(\frac{\partial \overrightarrow{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{E_y}}{\partial y} \right) dz}_{\xrightarrow[a\to 0]{} 0} + (E_z(x,y,a,t) - E_z(x,y,0,t)) &= \frac{\sigma(x,y,t)}{\epsilon_0} \\
\text{d'où, à la limite } \quad a \to 0 \ : \quad \overrightarrow{E}(0,0,a,t) - \overrightarrow{E}(0,0,0,t) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\
\text{puis : } \quad \overrightarrow{n_{12}} \cdot \left(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} \right) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Autrement dit, **la composante normale du champ électrique est discontinue si la surface traversée est chargée**.

2.3.2.2 Composante normale du champ magnétique

Nous partons ici de l'équation de Maxwell-Thomson div $\overrightarrow{B} = 0$. En substituant $\overrightarrow{B}$ à $\overrightarrow{E}$ et en annulant le membre de droite de l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient directement, avec la démonstration précédente, le résultat suivant [Labarthe, 2005] :

$$\overrightarrow{n_{12}} \cdot \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} \right) = 0$$

Autrement dit, **la composante normale du champ magnétique est continue**.

2.3.3 Relations de passage des composantes tangentielles

La densité surfacique de courant est une grandeur finie, en dépit de sa définition correspondant à la limite où l'épaisseur a tend vers zéro, et où sa densité volumique peut prendre localement des valeurs très élevées. C'est par ailleurs la densité surfacique de courant qui influe sur les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique.

2.3.3.1 Composante tangentielle du champ magnétique

Si on écrit l'équation de Maxwell-Ampère sous une forme développée, et projetée selon l'axe x [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
\Rightarrow \underbrace{\int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial y} dz}_{\xrightarrow[a\to 0]{} 0} - B_y(x,y,a,t) + B_y(x,y,0,t) &= \mu_0 j_x + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\int_0^a \frac{\partial E_x}{\partial t} dz}_{\xrightarrow[a\to 0]{} 0} \\
\text{d'où, à la limite } \quad a \to 0 \ : \quad -B_{2y} + B_{1y} &= \mu_0 j_{sx}
\end{aligned}$$

De même en refaisant la démonstration selon la composante y :

$$B_{2x} - B_{1x} = \mu_0 j_{sy}$$

Le courant surfacique étant, par définition, nul sur la normale à la surface, il ne contribue pas à la relation de passage. Mise sous une forme vectorielle, celle-ci s'écrit :

$$\overrightarrow{n_{12}} \wedge \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right) = \mu_0 \overrightarrow{j_s}$$

La composante tangentielle du champ magnétique est donc discontinue si la surface traversée est parcourue d'un courant.

2.3.3.2 Composante tangentielle du champ électrique

Nous partons ici de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\partial\overrightarrow{B}/\partial t$. En substituant $\overrightarrow{E}$ à $\overrightarrow{B}$, puis $\overrightarrow{0}$ à la place de $\overrightarrow{j_s}$ et enfin $-\overrightarrow{B}$ à $\mu_0\epsilon_0\overrightarrow{E}$ (transformant donc l'équation de Maxwell-Ampère en équation de Maxwell-Faraday), on obtient [Labarthe, 2005] :

$$\overrightarrow{n_{12}} \wedge \left(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}\right) = \overrightarrow{0}$$

La composante tangentielle du champ électrique est donc continue.

2.3.4 Synthèse sur les relations de passage

On peut donc résumer les relations de passage d'un milieu 1 à un milieu 2 par deux équations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{12}} \\ \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} &= \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{12}} \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous résume aussi les composantes continues ou discontinues (voir aussi 2.3 page suivante) :

Composante	Ch. électrique	Ch. magnétique
Tangentielle	Continue	Discontinue
Normale	Discontinue	Continue

Ces résultats sont à l'origine des propriétés relatives à l'invariance et à la symétrie des champs électrostatique et magnétostatiques, propriétés formulées qualitativement par le principe de Curie[14].

2.4 Énergie électromagnétique

2.4.1 Puissance transmise par un champ électromagnétique à des charges

Nous avons vu qu'une charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$, est soumise, en $\overrightarrow{r}$ et à t, à la force de Lorentz $\overrightarrow{F}$ [Labarthe, 2005] :

$$\overrightarrow{F}_{\overrightarrow{E},\overrightarrow{B}\to q} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

Par conséquent, la puissance transmise par le champ électromagnétique, en tant qu'acteur de la force de Lorentz, à la charge, s'écrit :

$$\begin{aligned} P &\equiv \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= q\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{E} \end{aligned}$$

14. Pierre Curie, 1859 – 1906.

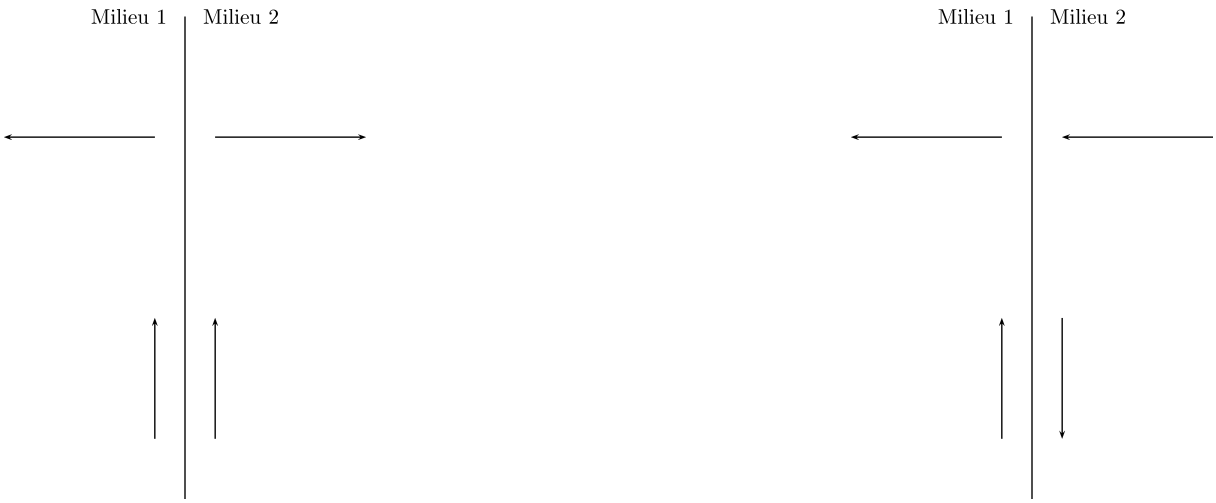


Figure 2.3 – Illustration du passage d'un champ électromagnétique à travers une surface : à gauche, le champ électrique ; à droit, le champ magnétique.

Si on considère N particules i de charge q_i, animées chacune d'une vitesse $\overrightarrow{v_i}$, et situées dans un volume $d\tau$, alors la puissance que le champ leur transmet est :

$$\begin{aligned} dP &= \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{E} \\ &= \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\ d\tau \\ \text{avec :} \quad \overrightarrow{j}\, d\tau &= \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{v_i} \end{aligned}$$

On a ainsi mis en évidence que **la puissance volumique transmise par le champ électromagnétique aux charges** est :

$$\frac{dP}{d\tau} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

2.4.2 Conservation de l'énergie

Si nous considérons un système de volume V fermé par une surface S, contenant des particules chargées baignant dans un champ électromagnétique, alors l'énergie totale du système est la somme des énergies des particules et du champ, l'énergie des particules étant simplement leur énergie cinétique, leur énergie potentielle étant incluse dans celle du champ, qui est le vecteur de leur interaction.

L'énergie totale du champ E_c dans le système est l'intégrale triple de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u\left(\overrightarrow{r}, t\right)$ sur le volume V [Labarthe, 2005] :

$$E_c = \iiint_V u\, d\tau$$

À l'instant t, l'énergie E_p des N particules dans le volume V est la somme de leur énergie cinétique :

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_i}^2$$

Si nous examinons l'énergie échangée avec l'extérieur, nous allons noter $\overrightarrow{P}\left(\overrightarrow{r}, t\right)$ la densité de courant d'énergie électromagnétique et Π_S son flux à travers la surface $\overrightarrow{dS}$:

$$\Pi_S = \iint_S \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dS}$$

En vertu du théorème de l'énergie cinétique, la variation d'énergie cinétique des particules est égale à la somme des travaux [15] des forces agissant dessus ; par conséquent la dérivée temporelle de l'énergie des particules est :

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dt} &= \frac{E_p(t+dt) - E_p(t)}{dt} \\ &= \iiint_V \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} d\tau \end{aligned}$$

Si nous supposons aussi que les N particules demeurent confinées à l'intérieur de la surface S, alors la variation temporelle de l'énergie totale du système, somme de l'énergie du champ E_c et de celle des particules E_p, s'exprime comme l'opposé du flux de l'énergie à travers la surface :

$$\frac{d}{dt}(E_p + E_c) = -\Pi_S$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Pi_S &\equiv \iint_S \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \iiint_V \text{div } \overrightarrow{P} d\tau \end{aligned}$$

Si on reprend l'expression de l'énergie totale comme intégrale de la densité d'énergie, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_p + E_c) &= \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \iiint_V \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} d\tau \\ &= -\iiint_V \text{div } \overrightarrow{P} d\tau \end{aligned}$$

Cette relation est vraie pour tout volume V si et seulement si :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} + \text{div } \overrightarrow{P} = 0$$

Cette relation est celle de la **conservation de l'énergie électromagnétique**, où nous rappelons que u est la densité volumique d'énergie, $\overrightarrow{j}$ la densité volumique de courant, $\overrightarrow{E}$ le champ électrique, et $\overrightarrow{P}$ la densité de courant d'énergie électromagnétique.

2.4.3 Vecteur et théorème de Poynting

Reprenons les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, sous une forme légèrement différente, respectivement [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) - \overrightarrow{\text{rot}} \, \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{0} \\ \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \, \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Calculons le produit scalaire de la première avec $\overrightarrow{E}$ et de la seconde avec $\overrightarrow{B}$:

15. On rappelle qu'un travail est une énergie ; c'est donc le produit d'une puissance par un temps.

$$\begin{aligned}
\text{d'abord :} \quad \overrightarrow{E} \cdot \left(\mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) - \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} \right) &= 0 \\
\iff \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \overrightarrow{E}^2 \right) + \mu_0 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= 0 \\
\text{ensuite :} \quad \overrightarrow{B} \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \right) &= 0 \\
\iff \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{B}^2 \right) + \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \right) &= 0
\end{aligned}$$

D'où, en sommant les deux :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{B}^2 \right) + \mu_0 \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \right) = 0$$

Mais, parmi les relations intéressantes de l'analyse vectorielle, il y a celle-ci :

$$\text{div} \left(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B} \right) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}$$

En l'utilisant, et en divisant par μ_0 la relation précédente, nous obtenons l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \overrightarrow{B}^2 \right) + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} + \text{div} \left(\frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \right) = 0$$

Cette relation constitue le **théorème de Poynting**[16]. Elle prend exactement la forme de celle de la conservation de l'énergie électromagnétique, si bien que l'on peut affirmer avoir mis en évidence deux grandeurs :

— la **densité d'énergie électromagnétique** :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \overrightarrow{B}^2$$

— le vecteur densité de courant d'énergie, appelé **vecteur de Poynting** :

$$\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

16. John Henry Poynting, 1852 – 1914.

Deuxième partie

Propriétés des ondes électromagnétiques

Chapitre 3

Ondes électromagnétiques

3.1 Preuves expérimentales historiques

3.1.1 La vitesse finie de la lumière

3.1.1.1 Vitesse de la lumière

C'est Ole Christensen Rømer (1644 – 1710) qui réalisa en 1675 la première mesure de la vitesse de la lumière depuis l'observatoire de Paris, en comparant les dates prévues d'entrée et de sortie de l'ombre de Jupiter de ses satellites aux dates observées.

Bien après, Fizeau [1] mesura, en 1849, la vitesse de la lumière avec un système de miroir et de roue dentée. En 1850, Foucault [2] l'estima avec la méthode du miroir tournant ; il montra aussi qu'elle est plus faible dans l'eau.

Enfin, en 1887, Michelson [3] et Morley [4] montrèrent l'invariance de la vitesse de la lumière dans un système en translation, en contradiction avec le modèle galiléen de relativité, ce qui aboutit au rejet du concept d'éther, milieu dont la vibration était censée expliquer la lumière.

3.1.1.2 Aberration

Bradley [5], observant les variations annuelles de coordonnées d'étoiles, en déduisit le phénomène d'aberration de la lumière. Il s'agit d'une déviation apparente de la lumière pour un observateur en mouvement relatif avec la lumière, dû à la différence entre la vitesse de la lumière et la sienne. La découverte de ce phénomène lui permit d'estimer la valeur de la vitesse de la lumière.

3.1.2 Caractère ondulatoire de la lumière

3.1.2.1 Principe d'Hyugens-Fresnel

Christian Huygens (1629 – 1695) a introduit l'idée que la lumière se comporte comme une onde et, en particulier, que tous les points de l'espace atteints par une surface d'onde se comportent à leur tour comme une source secondaire, en phase, de la même onde. Augustin Fresnel [6] a complété cette hypothèse en ajoutant que l'amplitude complexe de l'onde mesurée en un point quelconque est la somme des amplitudes complexes émises par l'ensemble des sources secondaires, en vertu du principe de superposition.

3.1.2.2 Interférences et diffraction

L'expérience de Young [7] mettant en évidence les phénomènes de diffraction et d'interférences pour la lumière a achevé de prouver le caractère ondulatoire de celle-ci. Les interférences sont le phénomène découlant de la superposition d'ondes, dont la manifestation consiste dans la succession de lieux où

1. Armand Hippolyte Louis Fizeau, 1819 – 1896.
2. Jean Bernard Léon Foucault, 1819 – 1868.
3. Albert Abraham Michelson, 1852 – 1931.
4. Edward Williams Morley, 1838 – 1923.
5. James Bradley, 1693 – 1762.
6. Augustin Jean Fresnel, 1788 – 1827.
7. Thomas Young, 1773 – 1829.

la superposition donne alternativement de l'obscurité et un surcroît de lumière. La diffraction est le phénomène consécutif à la traversée d'une ouverture par une onde, qui se traduit par une diffusion directionnelle de l'onde, et aboutit à des interférences entre les différentes ondes ainsi générées, à partir pourtant d'une même onde initiale.

3.1.2.3 Effet Doppler

L'effet Doppler[8] se manifeste lorsqu'un émetteur et un récepteur d'onde sont en mouvement relatif. L'onde est perçue avec une longueur d'onde plus faible, donc une fréquence plus élevée, lorsque l'émetteur et le récepteur s'approchent l'un de l'autre ; le phénomène inverse est observé lorsqu'ils s'éloignent réciproquement.

3.1.2.4 Polarisation

En 1808, Malus[9] découvrit la polarisation de la lumière, et la loi d'évolution de l'intensité lumineuse au passage d'un polariseur.

3.1.2.5 Ondes radioélectriques

C'est en 1884 que Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) généralisa la preuve de l'existence à toutes les longueurs d'onde d'ondes répondant aux équations de Maxwell, et pas seulement au visible, et subissant les mêmes phénomènes que les ondes optiques, comme les interférences ou la diffraction.

3.2 Équations d'onde

3.2.1 Ondes des champs électromagnétiques

3.2.1.1 Onde du champ électrique

Nous commençons par prendre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday [Parisi, 2001] :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E}\right) = -\overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Après avoir inversé les dérivées spatiales et temporelles, successivement nous utilisons l'équation de Maxwell-Ampère puis la définition du laplacien vectoriel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E}\right) &= -\mu_0\left(\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} + \epsilon_0\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right) \\ \iff \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} - \epsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

3.2.1.2 Onde du champ magnétique

De même, en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère, en introduisant celle de Maxwell-Faraday et en utilisant la définition du laplacien vectoriel, on obtient pour le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \epsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{j}$$

8. De Christian Andreas Doppler, 1803 – 1853.
9. Étienne Louis Malus de Mitry, 1775 – 1812.

3.2.1.3 Ondes dans le vide

Dans le vide, ou à tout le moins loin des sources (c'est-à-dire $\rho \simeq 0$ et $\overrightarrow{j} \simeq \overrightarrow{0}\ \forall t$), on a :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} - \epsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \epsilon_0\ \mu_0\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{3.2}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ vérifient une **équation d'onde** de d'Alembert [10] vectorielle, de célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\ \mu_0}}$$

3.2.2 Ondes des potentiels

3.2.2.1 Existence des potentiels électromagnétiques

L'équation de Maxwell-Thomson 2.2 est équivalente à l'affirmation de l'**existence d'un potentiel vecteur** $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} \\ \text{car :}\quad \text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}} &\equiv 0 \end{aligned}$$

ce qui, replacé dans l'équation 2.3, nous donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ &= -\overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

relation équivalente à :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{0}$$

Cela revient à dire qu'**il existe un potentiel scalaire** $V(\overrightarrow{r}, t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\ V \\ \text{car :}\quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}} &\equiv \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Champs et Potentiels) — *Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ s'expriment à l'aide des potentiels $\overrightarrow{A}$ et V par :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\ V \\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

10. Jean Le Rond d'Alembert, 1717 – 1783.

3.2.2.2 Équations d'onde des potentiels

En prenant la divergence de la relation établissant l'existence du champ électrique comme dérivant de potentiels, nous obtenons [Cohen-Tannoudji *et al.*, 2001] :

$$\begin{aligned} \text{div } \overrightarrow{E} &= \text{div } \left(-\overrightarrow{\text{grad}}\ V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

Introduisant l'équation de Maxwell-Gauss dans ce résultat, nous obtenons :

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overrightarrow{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

De même, à partir de l'équation liant le potentiel vecteur au champ magnétique, nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \overrightarrow{A} - \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

Introduisant l'équation de Maxwell-Ampère dans cette relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{A} - \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \overrightarrow{A} &= -\mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \left(\overrightarrow{j} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ V + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) \right) \\ \iff \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \overrightarrow{A} + \mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \overrightarrow{j} \\ \iff \Box \overrightarrow{A} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \overrightarrow{A} + \mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

3.2.2.3 Jauges

a) Invariance de transformation On sait que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f \right) = \overrightarrow{0}$$

Si on postule l'existence d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A'}$ tel que :

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ f$$

où f est un champ scalaire, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'} &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A'} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ f \right) \\ &= \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} + \overrightarrow{0} \\ &= \overrightarrow{B} \end{aligned}$$

De même, s'il existe un potentiel scalaire V' tel que :

$$
\begin{aligned}
V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \\
\text{alors :} \quad \overrightarrow{E'} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V' - \frac{\partial \overrightarrow{A'}}{\partial t} \\
&= -\overrightarrow{\text{grad}} \left(V - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}}\, f}{\partial t} \\
&= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \\
&= \overrightarrow{E}
\end{aligned}
$$

Autrement dit, une transformation des potentiels $(\overrightarrow{A}, V)$ aboutissant aux potentiels $(\overrightarrow{A'}, V')$ de la façon vue précédemment laisse invariants les champs associés $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$: ce type de transformation est appelée **transformation de jauge**.

b) Jauge de Coulomb On peut remarquer que si on pose la condition appelée **jauge de Coulomb** [Cohen-Tannoudji *et al.*, 2001] :

$$
\text{div}\ \overrightarrow{A} = 0
$$

alors les équations qui régissent les potentiels prennent la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\Box \overrightarrow{A} &= \mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \overrightarrow{j}
\end{aligned}
$$

c) Jauge de Lorentz Parmi tous les couples de potentiels $(\overrightarrow{A}, V)$ vérifiant l'invariance de jauge, il en est une, appelée **jauge de Lorentz**, que l'on utilise souvent [Cohen-Tannoudji *et al.*, 2001] :

$$
\text{div}\ \overrightarrow{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0
$$

Les équations régissant les potentiels prennent alors la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\iff \Box V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\text{et :} \quad \Box \overrightarrow{A} &= -\mu_0 \overrightarrow{j}
\end{aligned}
$$

Ainsi on a pu montrer que l'utilisation de la jauge de Lorentz conduit à découpler les équations des potentiels, au prix du passage à une dérivée seconde.

3.2.3 Électromagnétisme en régime stationnaire

Le cas particulier du régime stationnaire est tel que toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles.

3.2.3.1 Équations de Poisson des potentiels

Concernant le champ électrique, en sachant que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \\ \text{et :} \quad \text{div}\, \overrightarrow{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{alors :} \quad -\,\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, V\right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \iff \Delta V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Cette équation est appelée **équation de Poisson**[11] **du potentiel électrique**. De même, à propos du champ magnétique, concernant sa formulation dérivant d'un potentiel et la jauge de Lorentz :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A} \\ \text{et :} \quad \text{div}\, \overrightarrow{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \text{div}\, \overrightarrow{A} &= 0 \\ \text{alors :} \quad \overrightarrow{\Delta}\, \overrightarrow{A} &= -\mu_0\, \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

qui est une **équation de Poisson du potentiel magnétique**. À titre illustratif, il peut ne pas être inutile de savoir qu'il existe une relation semblable mettant en lien le laplacien du potentiel gravitationnel Φ et la densité de matière ρ, le facteur proportionnel entre eux faisant intervenir une constante fondamentale de la physique (en l'occurrence G, la constante de la gravitation universelle) :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

3.2.3.2 Loi de Coulomb

On peut montrer que pour une distribution finie de charge ρ générant un potentiel V, la condition aux limites $V(\infty) = 0$ amène à la solution suivante de l'équation de Poisson [Olivier *et al.*, 2000] :

$$V(M) = \iiint_P \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 |PM|} d\tau$$

Selon la géométrie de la distribution de ρ (ponctuelle, sphérique, etc.), on peut alors calculer l'expression du champ électrique, gradient du potentiel décrit comme ci-dessus. Dans le cas général, nous avons l'expression suivante, dite **loi de Coulomb**[12] :

$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint_P \frac{\rho(P)\overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 |PM|^3} d\tau$$

3.2.3.3 Loi de Biot-et-Savart

La condition aux limites $\overrightarrow{A}(\infty) = \overrightarrow{0}$ impose la solution suivante [Olivier *et al.*, 2000] :

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\overrightarrow{j}(P)}{|PM|} d\tau$$

La dérivation de ce potentiel par un rotationnel donne :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\overrightarrow{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{|PM|^3} d\tau$$

que l'on appelle la loi de **Biot**[13]**-et-Savart**[14].

11. Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840.
12. Charles-Augustin Coulomb, 1736 – 1806.
13. Jean-Baptiste Biot, 1774 – 1862.
14. Félix Savart, 1791 – 1841.

3.3 Solution des équations d'ondes

3.3.1 Surface d'onde

On appelle **surface d'onde** le lieu des points où l'onde a même valeur, que celle-ci soit scalaire ou vectorielle (avec ce que cela impose), et même état de phase. La surface d'onde peut avoir une forme quelconque *a priori*.

3.3.2 Ondes solutions

3.3.2.1 Reformulation de l'équation d'ondes

La forme prise par les équations d'onde des champs électrique et magnétique dans le vide est du type [Mouchet, 2011] :

$$\Box \overrightarrow{s} = \overrightarrow{0}$$

où $\overrightarrow{s}$ est l'amplitude de l'onde. Si on considère une onde se propageant selon l'axe x, l'équation d'onde se réécrit comme un produit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overrightarrow{s}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{s}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{0} \\ \iff \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\overrightarrow{s} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

On procède alors au changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} u &= t - \frac{x}{c} \\ v &= t + \frac{x}{c} \\ \iff x &= \frac{c}{2}(v-u) \\ t &= \frac{1}{2}(v+u) \end{aligned}$$

L'équation d'onde se réécrit alors :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{s}}{\partial u \partial v} = \overrightarrow{0}$$

3.3.2.2 Onde plane

Cette équation a pour solution la somme de deux **ondes planes** indépendantes et se propageant en sens inverses :

$$\overrightarrow{s}(x,t) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{g}(v)$$

On constate que :

$$\overrightarrow{s}(x,t) = \overrightarrow{s}(x+dx, t+dt)$$

ce qui signifie que l'onde plane ne se déforme ni dans l'espace ni dans le temps. Néanmoins, sa propagation n'est liée qu'à deux paramètres : le temps t et l'abscisse de propagation x.

3.3.2.3 Onde sphérique

On peut vérifier que d'autres formes d'ondes sont solutions de l'équation de propagation. Ainsi l'**onde sphérique**, de forme :

$$s(r,t) \quad = \quad \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

avec r le rayon paramètre de propagation de l'onde, et dont il est évident que l'amplitude décroît au cours de la propagation, est aussi solution. En termes physiques, l'onde plane n'est qu'une approximation de l'onde sphérique, lorsqu'on l'examine loin de sa source, et que l'amplitude ne varie plus beaucoup avec la distance à celle-ci. L'onde sphérique dépend du temps t et de la distance à la source, notée r.

3.3.2.4 Onde progressive harmonique

L'**onde plane progressive harmonique**, de forme :

$$\overrightarrow{s}(r,t) \quad = \quad \overrightarrow{s_0} \cos\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\right)$$

est aussi solution, tout comme l'**onde sphérique progressive harmonique**, dont le caractère oscillant est préservé mais dont l'amplitude décroît de façon inverse de la distance :

$$\overrightarrow{s}(r,t) \quad = \quad \frac{1}{r}\overrightarrow{s_0} \cos\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\right)$$

$\overrightarrow{r_0}$ est ici un paramètre, une constante d'intégration, que l'on prendra nul par la suite (sauf mention explicite). On a noté ω la pulsation de l'onde et $\overrightarrow{k}$ le **vecteur d'onde**, tels que :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} && T \text{ étant la } \textbf{période} \text{ temporelle} \\ \overrightarrow{k} &= \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_x} && \lambda \text{ étant la } \textbf{longueur d'onde}, \textit{i.e.} \text{ la période spatiale} \end{aligned}$$

L'onde harmonique appelle quelques commentaires :

— elle est utilisée pour décrire toute onde ayant un caractère périodique. Au regard de considérations non développées dans ce document, on peut montrer que tout signal peut être décomposé en fréquences, ce qui confère au modèle de l'onde harmonique une importance de tout premier ordre ;

— en aucun cas la fréquence ou, de façon équivalente, la pulsation, ne varie selon le milieu traversé par l'onde ; cela signifie que cette grandeur, qui incarne le couplage temporel de son comportement, est indépendante de la propagation.

On observera d'ailleurs que k et λ sont liés par la vitesse de l'onde, vitesse de la lumière en l'occurrence :

$$\frac{k}{\lambda} \quad = \quad \frac{1}{c}$$

3.3.2.5 Ondes stationnaires

Les ondes stationnaires résultent de la superposition d'ondes progressives harmoniques ayant même amplitude, même vecteur d'onde et même pulsation, mais se propageant en sens inverses. C'est notamment le cas des ondes électromagnétiques dans les cavités, ou des ondes mécaniques des cordes tenues aux deux extrémités. Si on note s_+ et s_- ces deux ondes, et s l'onde résultante, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} s &\equiv s_+ + s_- \\ &= s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0 \cos(\omega t + k_x) \\ &= 2s_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \end{aligned}$$

On voit ainsi que l'onde ne semble plus se propager, mais vibrer uniquement. Certains points, appelés nœuds, voient leur amplitude toujours demeurer nulle.

3.3.2.6 Vecteur d'onde optique

En optique, la direction de $\overrightarrow{k}$ représente la direction de propagation du rayon lumineux. Il est à noter que ce vecteur peut varier selon le milieu traversé :

— son amplitude peut varier, cela signifie que la distance parcourue par l'onde pendant une période (de temps) de son oscillation dépend des conditions de propagation[15] : c'est le phénomène de dispersion, que nous étudierons ultérieurement ;

— sa direction et son sens peuvent varier : c'est le phénomène de réflexion et de réfraction, que nous étudierons ultérieurement aussi.

3.3.2.7 Potentiels retardés

On peut montrer que les solutions des équations de propagation des potentiels prennent la forme d'une **onde sphérique** :

$$\begin{aligned} V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_P \frac{\rho(P,t-\frac{PM}{c})}{PM}d\tau \\ \overrightarrow{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_P \frac{\overrightarrow{j}(P,t-\frac{PM}{c})}{PM}d\tau \end{aligned}$$

Ces solutions, admises, amènent des commentaires :

— les potentiels sont en proportion directe de l'intégrale volumique des densités physiques qui leur sont associés ;

— cette proportionnalité s'opère avec un délai correspondant au temps mis par « l'information » de densité pour se propager, confirmant la nature ondulatoire de cette propagation ;

— cette proportionnalité s'opère avec une décroissance spatiale en $1/r$, conférant à ces solution le statut d'onde sphérique ;

— ces solutions n'interdisent pas le régime stationnaire ;

— c'est finalement, par les relations de dérivation vectorielle déjà vues, que les champs électrique et magnétique se propagent aussi sous la forme d'une onde.

3.3.3 Représentation complexe de l'onde plane progressive harmonique

3.3.3.1 Description de l'onde

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'étude de l'onde plane progressive harmonique ; celle-ci peut se réécrire sous deux formes complexes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\underline{s}} &= \overrightarrow{\underline{s_0}}e^{i(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{\underline{s}} &= \overrightarrow{\underline{s_0}}e^{-i(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} \\ \text{de sorte que :}\quad s &= Re(\underline{s}) \end{aligned}$$

où les grandeurs soulignées sont complexes, et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

3.3.3.2 Écriture des opérateurs vectoriels sous forme complexe

On fera observer que les opérateurs de dérivation prennent alors une forme complexe particulière :

— pour l'onde complexe en i :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} &= -i\overrightarrow{k} \\ \text{div} &= -i\overrightarrow{k}\cdot \\ \overrightarrow{\text{rot}} &= -i\overrightarrow{k}\wedge \\ \frac{\partial}{\partial t} &= i\omega \end{aligned}$$

15. Par conditions de propagation, nous entendons, certes, le milieu, mais aussi la superposition de deux ondes, etc.

— pour l'onde complexe en $-i$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} &= i\overrightarrow{k}\\ \text{div} &= i\overrightarrow{k}\cdot\\ \overrightarrow{\text{rot}} &= i\overrightarrow{k}\wedge\\ \frac{\partial}{\partial t} &= -i\omega\end{aligned}$$

En revanche, quelle que soit la forme de l'onde, les laplaciens scalaire et vectoriel s'écrivent de la même façon. Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta &= -k^2\\ \overrightarrow{\Delta} &= -k^2\end{aligned}$$

Ces résultats sont obtenus à partir des écritures des opérateurs complexes de premier degré et, pour ce qui est du laplacien vectoriel, de l'utilisation du double produit vectoriel.

Ainsi les opérateurs d'Alembertiens complexes scalaire et vectoriel s'écrivent :

$$\Box = -k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

3.3.3.3 Équations de Maxwell complexes générales

Les équations de Maxwell se réécrivent ainsi, pour l'onde en i :

$$\begin{aligned}-i\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ -i\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} &= 0\\ -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} &= -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}\\ -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} &= \mu_0\overrightarrow{j}+\frac{1}{c^2}\omega\underline{\overrightarrow{E}}\end{aligned}$$

3.3.3.4 Équations de Maxwell complexes dans le vide et conséquences

Les équations de Maxwell dans le vide et loin des sources se réécrivent ainsi, pour l'onde en i :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} &= 0\\ \overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} &= 0\\ -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} &= -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}\\ -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} &= \frac{1}{c^2}\omega\underline{\overrightarrow{E}}\end{aligned}$$

Ceci amène à quelques résultats importants relatifs à la propagation du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{B}} &= \frac{1}{\omega}\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}}\\ \underline{\overrightarrow{E}} &= -\frac{c^2}{\omega}\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}\end{aligned}$$

Ceci signifie que :
— $\overrightarrow{k}$, $\underline{\overrightarrow{E}}$, $\underline{\overrightarrow{B}}$ forment un trièdre orthogonal ;
— $\underline{\overrightarrow{E}}$ et $\underline{\overrightarrow{B}}$ vibrent en phase.

On peut démontrer que le vecteur d'onde s'exprime aussi ainsi :

$$\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{E^2}\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$$

On voit ici que le rayon lumineux, notion originellement d'optique, se généralise ici à toute onde électromagnétique et que, de surcroît, il est orthogonal à la surface d'onde.

3.4 Polarisation

3.4.1 Présentation

La polarisation caractérise la direction dans laquelle vibrent les champs électrique et magnétique. Si on continue d'étudier une onde se propageant selon l'axe $\overrightarrow{u_x}$, alors *a priori* le champ $\underline{\overrightarrow{E}}$ vibre dans le plan (y, z) ; on peut donc écrire :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \left(\underline{E_y}\overrightarrow{u_y} + \underline{E_z}\overrightarrow{u_z}\right) e^{i(\omega t - kx)}$$

Les amplitudes complexes selon chaque axe peuvent s'écrire comme le produit d'une amplitude réelle et d'une exponentielle imaginaire pure décrivant sa phase :

$$\begin{aligned} \underline{E_y} &= E_y e^{i\phi_y} \\ \underline{E_z} &= E_z e^{i\phi_z} \end{aligned}$$

Si nous revenons en écriture réelle, nous obtenons la forme suivante :

$$\overrightarrow{E} = E_y \cos(\omega t - kx + \phi_y)\overrightarrow{u_y} + E_z \cos(\omega t - kx + \phi_z)\overrightarrow{u_z}$$

Si on examine la trajectoire de l'extrémité P du vecteur $\overrightarrow{E}$ dans le plan (y, z), l'origine O étant prise sur le projeté de l'axe x sur ce plan, alors il décrit une courbe paramétrique décrite par :

$$\begin{aligned} OP_y &= E_y \cos(\omega t - kx + \phi_y) \\ OP_z &= E_z \cos(\omega t - kx + \phi_z) \end{aligned}$$

3.4.2 Polarisation rectiligne

La polarisation est dite rectiligne quand **le champ électrique vibre dans une direction fixe**. Mathématiquement, ceci est obtenu lorsque les deux déphasages sont égaux ou distincts de π :

$$\begin{aligned} \phi_y &= \phi_z \mod 2\pi \\ \text{ou :} \quad \phi_y &= \phi_z + \pi \mod 2\pi \end{aligned}$$

La direction de vibration est donc caractérisée par un angle θ que celle-ci fait avec l'axe $\overrightarrow{u_y}$, tel que :

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{E_z}{E_y} \\ &= cte \\ \text{ou :} \quad \tan\theta &= -\frac{E_z}{E_y} \\ &= cte \end{aligned}$$

3.4.3 Polarisation circulaire

La polarisation est dite circulaire lorsque deux conditions sont réunies :

$$\begin{aligned} & E_y &=& E_z \\ \text{et :} \quad & \phi_z &=& \phi_y \pm \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'égalité des composantes du champ électrique, indépendamment de la direction, et le déphasage d'un quart de cercle entre les deux phases. Le point P décrit alors un cercle de rayon E.

On dit que la polarisation est circulaire gauche quand le cercle est décrit dans le sens trigonométrique, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \phi_z &= \phi_y - \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ \Rightarrow \underline{\underline{\frac{E_z}{E_y}}} &= e^{-i\pi/2} \end{aligned}$$

La polarisation est dite circulaire droite quand le cercle est décrit dans le sens horaire, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \phi_z &= \phi_y + \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ \Rightarrow \underline{\underline{\frac{E_z}{E_y}}} &= e^{i\pi/2} \end{aligned}$$

On observera que, dans les deux cas, il n'y a aucun moyen de savoir quelle est la vitesse angulaire du point P lors de son parcours du cercle de polarisation.

3.4.4 Polarisation elliptique

La polarisation elliptique est le cas le plus général, dont les polarisations rectilignes et circulaires ne sont que des cas particuliers (voir figure 3.1).

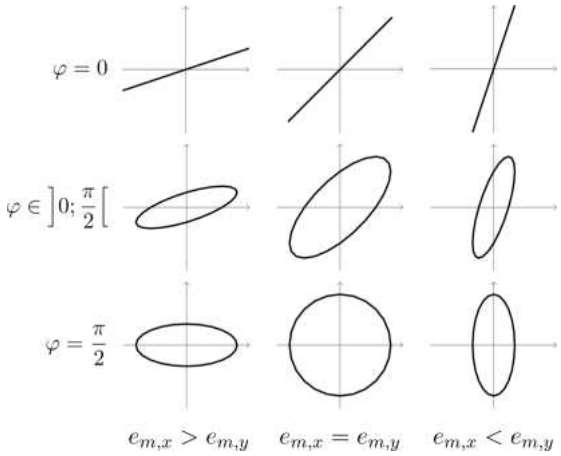


Figure 3.1 – Courbes de Lissajoux pour la polarisation, avec $\varphi = \phi_z - \phi_y$. Source : [Bosser, 2013].

3.4.5 Représentation de Jones

3.4.5.1 Présentation

Un état de polarisation d'une onde plane monochromatique est totalement déterminé par la donnée des amplitudes des deux composantes du champ électrique dans le plan de polarisation. Si ce plan est

doté d'un système d'axe (y, z), alors la notation de Jones[16] est la suivante (en omettant le facteur de propagation) [Perez *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{E_{my}} \\ \underline{E_{mz}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{my}e^{i\phi_y} \\ E_{mz}e^{i\phi_z} \end{pmatrix} \\ &= E_{my}e^{i\phi_x}\begin{pmatrix} 1 \\ re^{i\varphi} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec $\underline{E_m}$ les amplitudes maximales des composantes du champ. Les valeurs prises par r et φ dépendent du type de polarisation. La deuxième ligne signifie que l'on prend l'amplitude sur l'axe x comme référence, et que l'on exprime celle sur l'axe y en fonction de la première.

3.4.5.2 Produit vectoriel, norme et amplitude

Si nous définissons le produit vectoriel complexe suivant entre deux vecteurs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{F}}$ ainsi :

$$\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{F}} = \underline{E_{mx}F_{mx}^*} + \underline{E_{my}F_{my}^*}$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si :

$$\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{F}} = 0$$

Dans le cas de la polarisation, cela signifie que les états de polarisation représentés par ces deux vecteurs sont orthogonaux.

La norme instantanée de $\underline{\vec{E}}$, que l'on peut qualifier d'amplitude instantanée du champ électrique, est définie par :

$$\begin{aligned} E_0 &= \left|\left|\underline{\vec{E}}\right|\right| \\ &= \sqrt{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*} \\ &= \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \\ &= E_{mx}\sqrt{1+r^2} \end{aligned}$$

3.4.5.3 Normalisation

On peut normaliser l'écriture de Jones avec l'amplitude du vecteur complexe $\underline{\vec{E}}$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon_y} \\ \underline{\varepsilon_z} \end{pmatrix} &= \frac{1}{E_0}\begin{pmatrix} \underline{E_{my}} \\ \underline{E_{mz}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{E_{my}}{E_0}\begin{pmatrix} 1 \\ re^{i\varphi} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.4.5.4 Propriétés de la polarisation rectiligne

Le cas de la polarisation rectiligne nous intéresse particulièrement. En effet, on a alors $\varphi = 0$ ou π et [Perez *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}\frac{E_{my}}{E_0}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \\ \text{avec :} \quad \alpha &= \arctan(\pm r)\end{aligned}$$

16. Richard Clarke Jones, 1916 – 2004.

Les deux états de polarisation rectiligne ε_h et ε_ν portés respectivement par les axes y et z du plan d'onde sont ainsi décrits par :

$$\varepsilon_h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i.e.\ \alpha = 0$$
$$\text{et :} \quad \varepsilon_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad i.e.\ \alpha = \pi/2$$

Ces deux états forment une base orthonormée :

$$\begin{aligned} \varepsilon_h \cdot \varepsilon_h^* &= 1 \\ \varepsilon_\nu \cdot \varepsilon_\nu^* &= 1 \\ \varepsilon_h \cdot \varepsilon_\nu^* &= 0 \end{aligned}$$

Dans cette base, tout état de polarisation quelconque est une combinaison linéaire de ces deux états :

$$\frac{E_{my}}{E_0} \begin{pmatrix} 1 \\ r \exp i\varphi \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_y}}{\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{i\phi_z}}{\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette propriété est très importante car elle permettra, à l'avenir, de **décrire tout état de polarisation par la simple superposition de deux états de polarisation rectilignes orthogonales**.

La représentation de Jones est particulièrement utile pour l'étude du comportement de la polarisation des ondes électromagnétiques dans un contexte d'interférence, de polariseurs, ou d'interface avec des lames (demi-onde, quart d'onde).

3.5 Énergie d'une onde électromagnétique

3.5.1 Relations générales dans le cadre de l'onde dans le vide

Nous avons vu la définition du vecteur de Poynting comme suit :

$$\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

c'est-à-dire que le vecteur de Poynting, qui caractérise la densité de courant d'énergie, se propage dans la même direction et le même sens que le vecteur d'onde.

Le cadre particulier de l'onde dans le vide permet aussi d'écrire les relations suivantes [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= \frac{EB}{\mu_0}\overrightarrow{u_x} \\ &= \frac{E^2}{c\mu_0}\overrightarrow{u_x} \\ &= c\epsilon_0 E^2 \overrightarrow{u_x} \end{aligned}$$

De même, nous avons vu que la densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\overrightarrow{B}^2$$

Les relations particulières entre les champs électrique et magnétique dans le cadre de l'onde dans le vide nous amènent à écrire :

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_0 \overrightarrow{E}^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{B}^2 \end{aligned}$$

De la sorte, nous pouvons écrire la **proportionnalité entre vecteur de Poynting et densité d'énergie** :

$$\overrightarrow{P} = cu\,\overrightarrow{u_x}$$

3.5.2 Énergie moyenne

3.5.2.1 Densité moyenne d'énergie

Nous réécrivons le champ avec les notations vues dans la partie relative à la polarisation, en complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \left(\underline{E_y}\overrightarrow{u_y} + \underline{E_z}\overrightarrow{u_z}\right) e^{i(\omega t - kx)}$$

En vertu des relations vues précédemment pour la densité volumique de l'énergie de l'onde électromagnétique, nous pouvons écrire, à partir cette fois de la notation réelle [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_0 \overrightarrow{E}^2 \\ &= \epsilon_0 \left(E_y^2 \cos^2(\omega t - kx + \phi_y) + E_z^2 \cos^2(\omega t - kx + \phi_z)\right) \end{aligned}$$

La moyenne temporelle de la densité d'énergie ne dépend plus de l'abscisse x, ni du temps :

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_t &= \frac{\epsilon_0}{2}\left(E_y^2 + E_z^2\right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\left|\underline{\overrightarrow{E}}\right|^2 \end{aligned}$$

3.5.2.2 Vecteur de Poynting moyen

De même si on calcule la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, nous pouvons utiliser sa proportionnalité avec la densité d'énergie pour établir :

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{P} \right\rangle_t &= c \langle u \rangle_t \overrightarrow{u_x} \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2}\left|\underline{\overrightarrow{E}}\right|^2 \overrightarrow{u_x} \end{aligned}$$

3.5.3 Flux d'énergie

Le flux du vecteur de Poynting $\overrightarrow{P}$ à travers une surface S donne la puissance électromagnétique qui traverse cette surface ; c'est aussi, évidemment, vrai pour les grandeurs moyennes. L'énergie électromagnétique moyenne traversant cette surface pendant un temps dt est donc [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned} \delta W &= \left\langle \overrightarrow{P} \right\rangle_t \cdot \overrightarrow{dS} dt \\ &= \langle u \rangle_t S c\, dt \end{aligned}$$

Cette énergie élémentaire est l'énergie contenue dans un cylindre de section S et de longueur $c\,dt$; le temps ayant un écoulement uniforme dans l'espace [17], ce cylindre se déplace à la vitesse c dans la direction u_x. Ceci prouve que **la vitesse de propagation de l'énergie est la même que celle des champs, en l'occurrence** c.

17. car nous ne nous plaçons pas dans un cadre relativiste.

3.6 Dispersion

3.6.1 Groupe d'ondes

3.6.1.1 L'énergie finie de l'onde

La représentation classique de l'onde harmonique (voir page 32) est une fonction définie dans l'espace de $-\infty$ à $+\infty$. La moyenne temporelle de l'énergie de cette onde s'exprime [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{s}|^2\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{s}_0|^2\, dx \\ &= |\underline{s}_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \\ &= +\infty\end{aligned}$$

ce qui est évidemment impossible. Autrement dit, cette représentation donnée n'est qu'une approximation ; une représentation réelle de l'onde physique doit contenir une description tenant compte du caractère fini de l'énergie de l'onde.

3.6.1.2 L'étendue spatio-temporelle de l'onde

a) Modèle classique d'émission Ainsi, **si l'onde est émise pendant un temps donné, elle est nécessairement limitée dans l'espace** : on parle alors de **train d'onde**, qui définit la plage de **cohérence** de l'onde, c'est-à-dire la plage sur laquelle on peut la représenter sous la forme harmonique. De la sorte, on considère un faisceau de lumière quasi-monochromatique de fréquence ν_0, se propageant vers les z croissants, et l'on suppose sa polarisation rectiligne [18], dans le plan (xy), en faisant un angle θ avec l'axe $\overrightarrow{u_x}$. On appelle train d'onde une onde monochromatique ayant un début et une fin, c'est-à-dire une longueur dite de cohérence ℓ et une durée dite aussi de cohérence τ pendant laquelle, au cours de sa propagation, elle passe en un point donné en prenant la forme suivante :

$$\overrightarrow{s} = s_0 \left(\cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}\right) \cos\left(2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \phi\right)$$

La durée de cohérence est le temps mis par la source pour émettre le train d'onde ; typiquement, cette valeur va de $10^{-11}s$ (lampe spectrale) à $10^{-6}s$ (laser).

Si une source émet une succession de trains d'onde, ceux-ci s'exprime de la même façon que ci-dessus, à cette nuance près, d'importance, que la phase à l'origine ϕ et l'angle donnant le plan de polarisation θ sont aléatoires et sans lien d'un train d'onde à l'autre [19].

b) Superposition d'ondes monochromatiques La représentation d'une onde finie vue précédemment ne satisfait cependant pas à la condition de finitude de l'énergie. Comment représenter une telle onde ? On peut faire l'hypothèse que plusieurs ondes monochromatiques se superposent ; ainsi, notant $f(\omega)$ la fonction donnant l'amplitude de l'onde de pulsation ω définie sur le domaine Ω, on peut représenter chaque onde comme [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$s_\omega = f(\omega)e^{-i(\omega t - kx)}$$

La superposition de ces ondes s'écrit :

$$s(x,t) = \int_\Omega f(\omega)e^{-i(\omega t - kx)}d\omega$$

18. On a vu précédemment que l'on peut décrire toute polarisation à partir de deux polarisations rectilignes orthogonales.
19. C'est une des avancées fondamentales du LASER que de permettre de faire osciller des atomes de concert, et d'obtenir ainsi des trains d'onde longs dans le temps et dans l'espace.

Cette superposition s'appelle un groupe d'ondes ou un paquet d'ondes. On peut montrer que, sous certaines conditions, on peut connaître la fonction f par :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(0,t)e^{i\omega t}dt$$

La fonction f est ainsi appelée spectre de pulsation de l'onde. Cette relation peut s'inverser et on peut trouver $s(0,t)$, appelée transformée de Fourier[20] de f, par :

$$s(0,t) = \int_{\Omega} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Si on s'intéresse un peu plus précisément à $s(0,t)$ et qu'on suppose que, sur une plage temporelle $-t_1 \leqslant t \leqslant t_1$ cette fonction monochromatique prend la forme [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$\begin{aligned} s(0,t) &= 4\pi \sin\omega_0 t \qquad \text{sur : } -t_1 \leqslant t \leqslant t_1 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad \text{ailleurs} \\ \text{avec : } \quad t_1 &= \frac{n\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

alors on peut écrire la fonction f :

$$\begin{aligned} f(\omega) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(0,t)e^{i\omega t}dt \\ &= 2\int_{-t_1}^{+t_1} \sin(\omega_0 t)\ e^{i\omega t}dt \\ &= i\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)t}{\omega-\omega_0} - \frac{\sin(\omega+\omega_0)t}{\omega+\omega_0}\right]_0^{t_1} \end{aligned}$$

On voit que le deuxième terme, de haute fréquence, est aussi très atténué ; la fonction f prend ainsi des valeurs d'autant plus importantes que ω est proche de ω_0. Si on examine le spectre en énergie, on est conduit à calculer le carré du module de f [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$|f(\omega)|^2 \approx \frac{\sin\frac{n\pi(\omega-\omega_0)}{\omega_0}}{(\omega-\omega_0)^2}$$

Ainsi, on voit que les valeurs de n, qui déterminent la durée d'émission de l'onde, déterminent aussi l'étalement de $|f(\omega)|^2$:

— si n est petit (donc si la durée d'émission est courte), $|f(\omega)|^2$ est très étalée : l'onde est riche en fréquences ;
— si n est grand (donc si la durée d'émission est longue), $|f(\omega)|^2$ est peu étalée autour de ω_0 : l'onde est de plus en plus monofréquentielle.

c) Largeur du spectre et durée de l'impulsion Si nous notons $\Delta t = 2n\pi/\omega_0$ la durée de l'impulsion, alors il lui correspond une onde, dans le vide, dont la durée est [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$\Delta x = c\Delta t$$

De la même façon, on peut mettre en évidence le lien entre la largeur du spectre $\Delta\omega \approx 2n\omega_0$ où la fonction $|f(\omega)|^2$ prend des valeurs significatives et l'étendue des vecteurs d'onde Δk :

$$\Delta k = \frac{\Delta\omega}{c}$$

20. Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 – 1830.

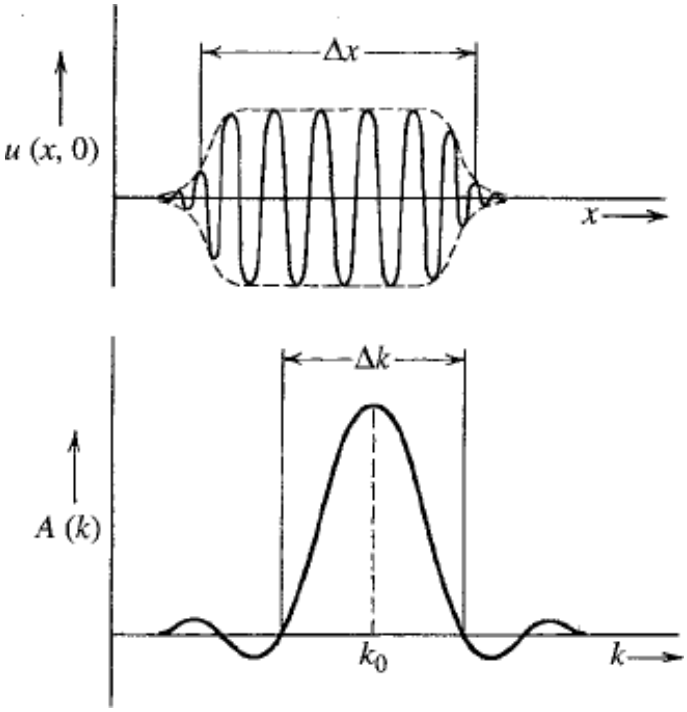


Figure 3.2 – Train d'ondes harmoniques d'extension finie, et spectre de fourier de ses nombres d'onde. Source : [Jackson, 2001].

Remplaçant c d'une relation dans l'autre, on aboutit à une relation entre la largeur spatiale de l'impulsion et la la largeur significative du spectre :

$$\Delta k \; \Delta x \quad = \quad 4\pi$$

On a ainsi mis en évidence l'antagonisme irréductible entre une localisation précise de l'impulsion et la largeur du spectre des pulsations, que la mécanique quantique a aussi établi, sous le nom de relation d'incertitude de Heisenberg [21].

3.6.2 La dispersion

3.6.2.1 Vitesse de phase

Nous considérons une onde plane progressive harmonique vers les x croissants, d'amplitude s_0, et de déphasage ϕ_0 :

$$s(x,t) \quad = \quad s_0 \cos\left(\omega t - kx + \phi_0\right)$$

Si nous examinons le point, non fixe, M_a tel que le signal garde en ce point la même valeur a. L'abscisse X_a de ce point à l'instant t vérifie :

$$s(X_a,t) \quad = \quad s_0 \cos(\omega t - kX_a + \phi_0)$$

a étant constant, on a donc :

$$X_a \quad = \quad \frac{\omega}{k} t + X_0$$

où X_0 est la position du point à l'instant $t = 0$. Le point M_a a une vitesse qui est la vitesse de propagation de la phase.

Nous savons par ailleurs que des ondes vérifiant l'équation de d'Alembert sont progressives, et se propagent sans se déformer quelle que soit leur forme. **Leur vitesse de phase est la célérité c et il**

21. Werner Karl Heisenberg, 1901 – 1976.

n'y a pas de dispersion par définition. C'est notamment le cas de l'onde électromagnétique dans le vide : toutes ses composantes spectrales se propagent ensemble et arrivent ensemble.

On dit qu'**il y a dispersion quand la vitesse de phase dépend de la fréquence**. La dispersion est normale quand v_ϕ décroît avec la fréquence. Quand v_ϕ est croissante avec la fréquence, la dispersion est anormale. La relation de dispersion lie la pulsation ω et le vecteur d'onde k.

3.6.2.2 Vitesse de groupe

Cependant, si le milieu a un indice de réfraction qui dépend de la fréquence, et que le signal émis en comporte plusieurs (ce qui est nécessairement le cas, comme nous l'avons vu), alors on va assister à des variations de la vitesse de phase avec la fréquence. Nous avons ainsi une impulsion sous forme de paquet d'ondes représentée par [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$s(x,t) = \int_\Omega f(\omega) e^{-i(\omega t - kx)} d\omega$$

Si l'impulsion est courte, alors les valeurs significatives de ω sont relativement proches de ω_0 et situées dans une bande $\Delta\omega$. Développant $\omega(k)$ au premier ordre au voisinage de ω_0, nous pouvons écrire :

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$$

Par une convention que nous justifierons d'ici peu, nous appelons **vitesse de groupe** la grandeur :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$$

De la sorte, si nous utilisons le développement de $\omega(k)$ et que nous l'insérons dans l'expression de représentation du paquet d'onde, nous obtenons [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$s(x,t) = \left(\int_{\Delta\omega} f(\omega) e^{i(k-k_0)(v_g t - x)} d\omega\right) e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

On constate que nous avons affaire à une modulation d'ondes : d'abord une onde plane de pulsation ω_0 et de nombre d'onde k_0 selon z, en dehors de l'intégrale ; ensuite une intégrale sur $\Delta\omega$, qui représente l'amplitude de l'onde. La pulsation du signal d'amplitude est :

$$(k - k_0) v_g = \omega - \omega_0$$

Or, comme, par hypothèse, ω est dans une bande étroite $\Delta\omega$ autour de ω_0, cette pulsation est faible. La symétrie de $\Delta\omega$ autour de ω_0 permet de montrer que l'amplitude de l'onde de $s(x,t)$ ne peut prendre que des valeurs réelles.

On peut ensuite s'intéresser à la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde ; celle-ci subit aussi la modulation de l'amplitude de l'onde qui est décrite par l'intégrale du premier facteur exprimant $s(x,t)$. Ainsi, pour connaître la vitesse de l'énergie de l'onde, on peut se contenter d'étudier la vitesse de l'amplitude de celle-ci, autrement dit examiner le temps au bout duquel elle reprend une valeur identique à elle-même. Ainsi on cherche la condition à laquelle nous avons :

$$\begin{aligned} v_g t - x &= cte \\ \Rightarrow v_g dt - dx &= 0 \qquad \text{par différenciation} \\ \iff \frac{dx}{dt} &= v_g \\ &= \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} \end{aligned}$$

Le groupe d'onde porte ainsi l'énergie de l'onde et sa vitesse est la vitesse de l'énergie de celle-ci. C'est donc celle observée par les instruments de mesure.

À titre d'exemple, supposons que nous superposons deux ondes de même amplitude s_0 et de fréquences légèrement différentes ω_1 et ω_2, de vecteurs d'onde respectifs k_1 et k_2. Nous posons ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ k_0 &= \frac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned}$$

Les ondes individuelles s'écrivant :

$$\begin{aligned} s_1(x,t) &= s_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ s_2(x,t) &= s_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned}$$

l'onde résultante, après quelques manipulations trigonométriques est :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= s_1(x,t) + s_2(x,t) \\ &= 2s_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right) \end{aligned}$$

Le phénomène observé est celui des battements : en certains endroits les deux cosinus sont en phase, et s'additionnent, en d'autres ils sont en opposition, et s'annulent ; ce phénomène est comparable à celui d'interférence entre ondes ayant localement même fréquence. On a donc une onde enveloppe (1er cosinus, basse fréquence), et une modulation fine (2e cosinus, haute fréquence) ; voir la figure 3.3.

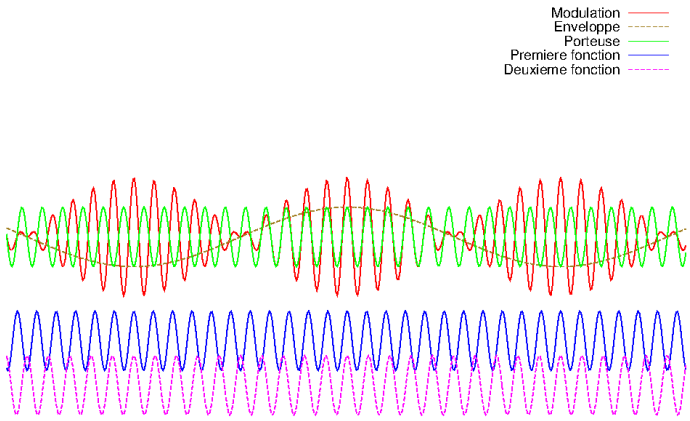


Figure 3.3 – Illustration des battements lors de la somme de deux sinusoïdes de fréquences différentes. La « première fonction » est celle que nous notons s_1 ; la « deuxième » est s_2 ; la première a une fréquence $1,1$ fois plus grande que la deuxième. On représente aussi les deux fonctions de porteuse et d'enveloppe, ainsi que leur produit, d'ailleurs somme de s_1 et de s_2, qui est l'onde modulée.

L'enveloppe se propage à la vitesse de phase :

$$v_{env} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

La vitesse de groupe s'exprime ici comme la limite :

$$\begin{aligned} v_g &\equiv \frac{d\omega}{dk} \\ &= \lim_{s_2 \to s_1} \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \end{aligned}$$

La modulation fine, quant à elle, se propage à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Or il est clair que :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &\neq \frac{\omega_0}{k_0} \\ \iff v_g &\neq v_\phi \end{aligned}$$

si bien que l'on peut affirmer que l'onde se déforme au cours du déplacement, à l'intérieur de l'enveloppe des battements, car la vitesse de phase et la vitesse de groupe ne sont pas égales. Pour fixer les idées : une crête de l'onde finement modulée avance à une vitesse différente de la vitesse de la crête de l'onde enveloppe.

3.7 Le spectre électromagnétique

La gamme des ondes électromagnétiques disponibles est aussi vaste que le sont les processus physiques d'émission. Une onde électromagnétique peut ainsi être décrite par un seul nombre : sa longueur d'onde dans le vide. En pratique, selon le domaine considéré, on emploiera plutôt la longueur d'onde (ultra-violet, visible, infrarouge), la fréquence (micro-ondes, radio), ou l'énergie du photon (rayons X et gamma), en vertu des relations suivants :

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} \\ E &= hf \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= 299\ 792\ 458\ m \cdot s^{-1} && \text{la } \textbf{vitesse de la lumière} \text{ dans le vide} \\ h &= 6,6260755 \cdot 10^{-34} J \cdot s && \text{la } \textbf{constante de Planck} \end{aligned}$$

À cela s'ajoute que certaines bandes particulières de fréquences ont des noms spécifiques, comme dans le cas des micro-ondes (voir figure 3.5 page suivante).

Dans d'autres cas, comme dans les longueurs d'ondes inférieures à celles du visible, l'énergie du photon sera exprimée dans une unité particulière, l'**électron-volt**. Un électron-volt correspond à l'énergie cinétique acquise par un électron initialement au repos soumis à une différence de potentiel de 1 Volt. On peut rapidement calculer cette énergie, à partir du théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} q \underbrace{\Delta V}_{=1 \text{ par déf.}} &= \underbrace{\Delta E}_{\equiv 1eV} \\ \Rightarrow 1\ eV &= 1,60217733 \cdot 10^{-19} J \\ \text{où l'on retrouve :} \quad e &= 1,60217733 \cdot 10^{-19} C \qquad \text{la charge élémentaire de l'électron} \end{aligned}$$

Enfin, comme nous l'avons vu, dans un milieu quelconque, la longueur d'onde peut être amenée à varier et à prendre une valeur différente de sa valeur dans le vide.

Exercices recommandés

11.1 page 177, 11.2.1 page 178, 11.2 page 178, 11.2.3 page 178, 11.5.3 page 187, 11.6.3 page 188, 11.2.5 page 179, 11.8.2.1 page 205, 11.8.2.4 page 210, 11.2.6 page 180, 11.2.7 page 180.

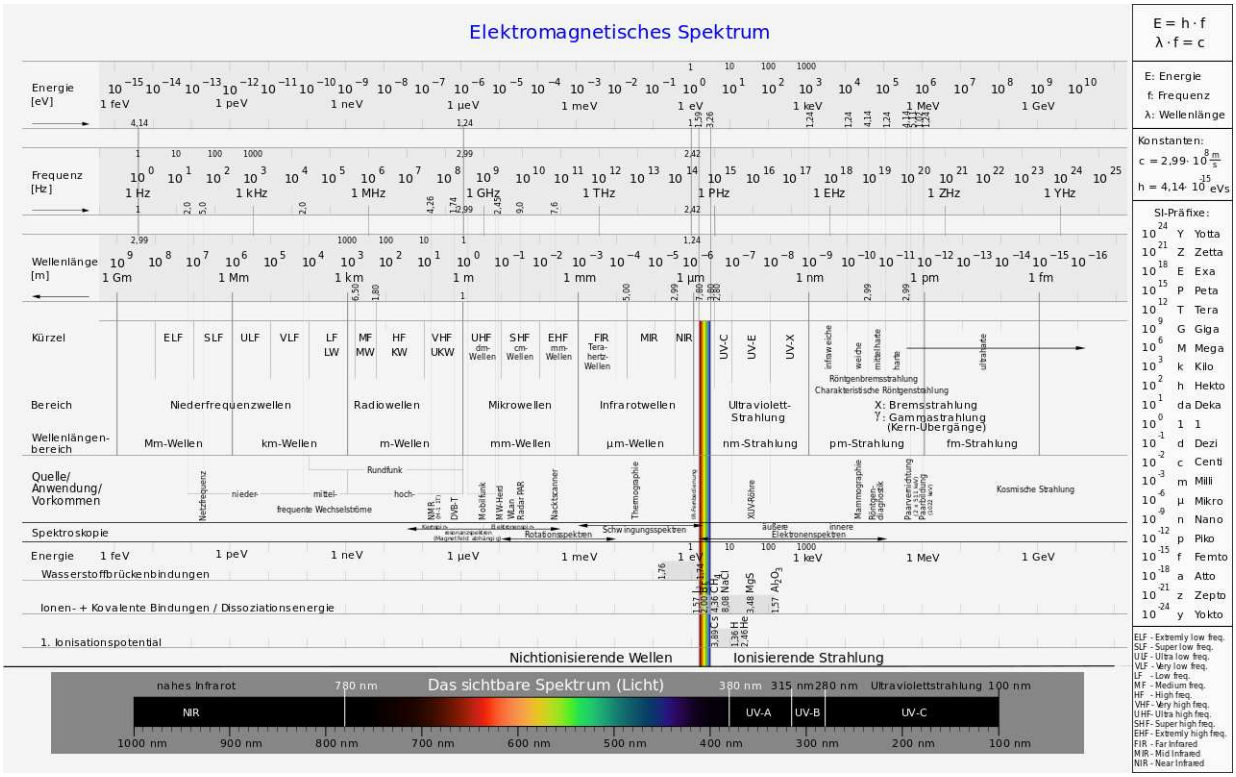


Figure 3.4 – **Le spectre électromagnétique. Source : Wikipédia en allemand.**

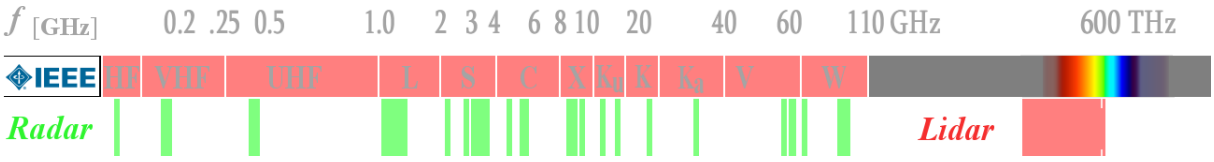


Figure 3.5 – **Les bandes de fréquences micro-ondes. Source :** http://www.radartutorial.eu/07.waves/Ondes%20et%20bandes%20de%20fr%C3%A9quences.fr.html.

Chapitre 4

Radiométrie

4.1 Considérations géométriques

4.1.1 Angle solide

On manipule souvent la notion d'angle dans un plan, qui est une mesure du secteur balayé, dans ce plan, par une droite tournant autour d'un point. On a cependant tout aussi souvent besoin de quantifier une amplitude de type angulaire dans l'espace ; ces grandeurs sont appelées **angles solides**, dont l'unité est le stéradian (sr).

Un angle solide élémentaire $d\Omega$ est défini comme étant le rapport entre une surface élémentaire dS définie sur une sphère et le carré r^2 du rayon r de celle-ci :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

De par sa définition, on utilisera souvent deux angles plans d'un système de coordonnées sphériques (θ, φ), θ étant la colatitude, et φ la longitude, pour calculer un angle solide. Toutefois, il est clair qu'un angle solide, en dépit de sa définition, ne dépend pas du rayon de la sphère considérée, car toute surface à la surface de celle-ci est proportionnelle au carré de son rayon, ce qui explique que seuls deux angles soient requis pour calculer un angle solide. En effet, dans un système de coordonnées sphériques porté par la sphère de rayon unité, on peut écrire que l'élément de surface vaut :

$$d\Sigma = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Dès lors, le cône de demi-angle au sommet α, d'axe l'axe z et de sommet O, a pour angle solide :

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, pour la sphère complète, α vaut π et l'angle solide correspondant est 4π.

4.1.2 Paramétrage général

Dorénavant, nous considérons que le rayonnement est en incidence sur une surface dS, située en $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ dont on va considérer les « deux côtés », arrière et avant, relatifs à :

- la réflexion, dans le cas d'une surface réflexive (même partiellement, et pas nécessairement spéculaire) ;
- l'absorption, dans le cas d'une surface absorbante (même partiellement) ;
- la diffusion, dans le cas d'une surface diffusante (même partiellement) ;
- la transmission, dans le cas d'une surface transparente (même partiellement).

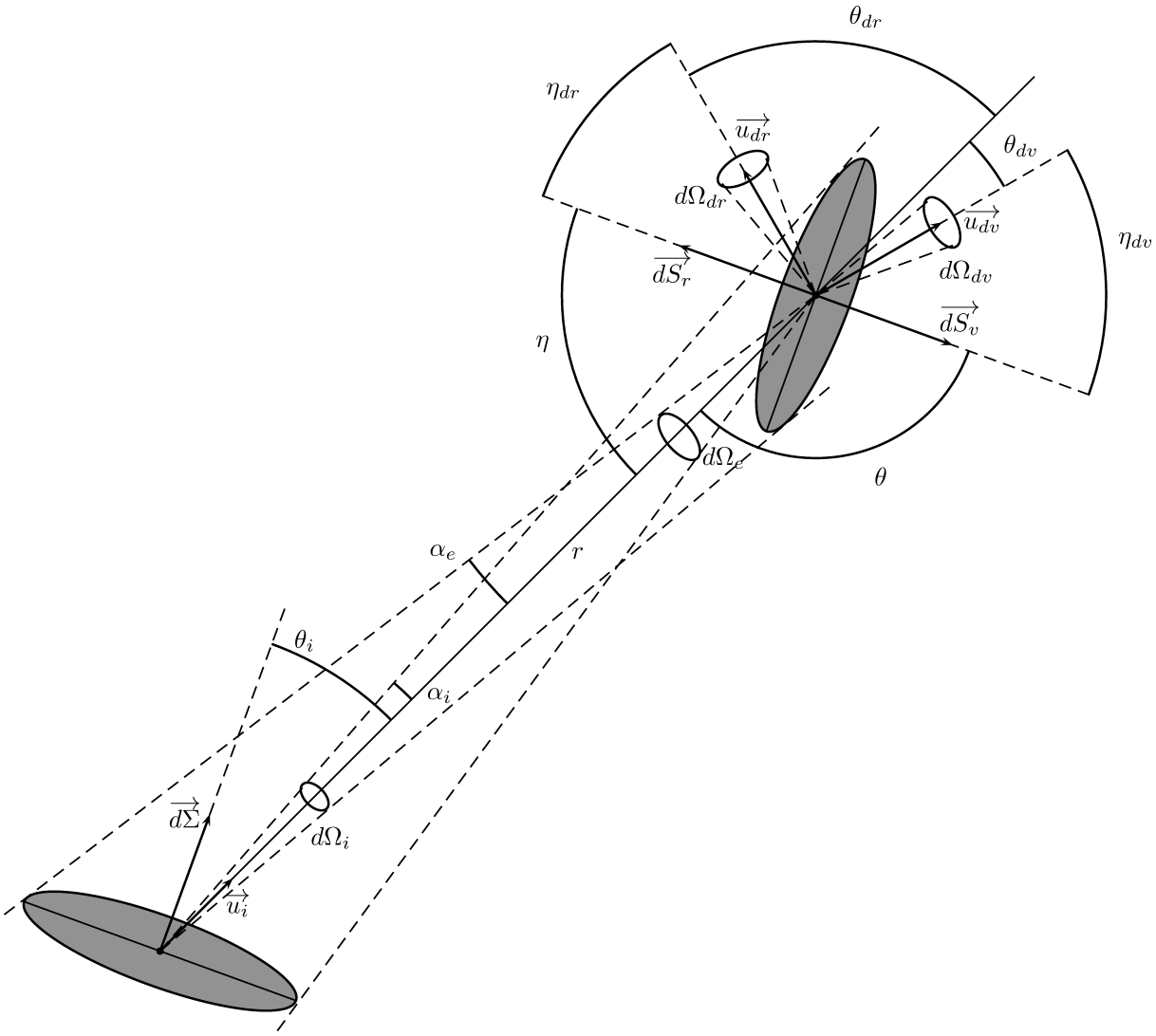


Figure 4.1 – Paramétrage pour l'observation des ondes électromagnétiques.

Nous n'avons cependant besoin que d'un paramétrage simple pour cette étude, en définissant les vecteurs directifs qui lui sont associés (voir figure 4.1), ainsi que les angles entre eux :

— le vecteur directif du rayonnement incident $\overrightarrow{u_i}$;
— le vecteur normal à la surface réceptrice, vers l'avant $\overrightarrow{dS}_v$, tel que $\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{dS}_v = -\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{dS}_r = -dS\cos\theta = dS\cos\eta$;
— le vecteur normal à la surface réceptrice, vers l'arrière $\overrightarrow{dS}_r = -\overrightarrow{dS}_v$ tel que $\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{dS}_r = \overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{dS}_v = -dS\cos\theta = dS\cos\eta$;
— le vecteur directif de l'observation du rayonnement réfléchi, ou diffusé vers l'arrière, par la surface réceptrice $\overrightarrow{u}_{dr}$, tel que $-\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u}_{dr} = \cos\theta_{dr}$ ou alors $\overrightarrow{dS_r}\cdot\overrightarrow{u_{dr}} = \cos\eta_{dr}$;
— le vecteur directif de l'observation du rayonnement transmis, ou diffusé vers l'avant, par la surface réceptrice $\overrightarrow{u}_{dv}$, tel que $\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u}_{dv} = \cos\theta_{dv}$ ou alors $\overrightarrow{dS_v}\cdot\overrightarrow{u_{dv}} = \cos\eta_{dv}$.

Nous ajoutons à ces définitions vectorielles les paramètres suivants :
— la distance entre la source et le centre de la surface est noté r ;
— l'angle solide sous lequel la surface dS est vue depuis la source est noté $d\Omega_i = dS\cos\eta/r^2$, correspondant à un cône d'ouverture α_i ;
— l'angle solide de la direction d'observation vers l'arrière est noté $d\Omega_{dr}$;
— l'angle solide de la direction d'observation vers l'avant est noté $d\Omega_{dv}$.

Enfin nous envisagerons le cas où la source n'est pas ponctuelle, mais surfacique ; le vecteur normal à la

surface d'émission sera noté $\overrightarrow{d\Sigma}$, tel que $\overrightarrow{d\Sigma} \cdot \overrightarrow{u_i} = d\Sigma \cos\theta_i$. La source, désormais étendue, est donc « vue » par la surface de réception, sous l'angle solide $d\Omega_e = d\Sigma \cos\theta_i / r^2$, correspondant à un cône d'ouverture α_e.

4.2 Grandeurs radiométriques

4.2.1 Grandeurs physiques

4.2.1.1 Flux

a) Flux instantané On peut écrire le **flux élémentaire instantané** (en watts) du vecteur de Poynting très simplement :

$$d\phi(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{dS_v}$$

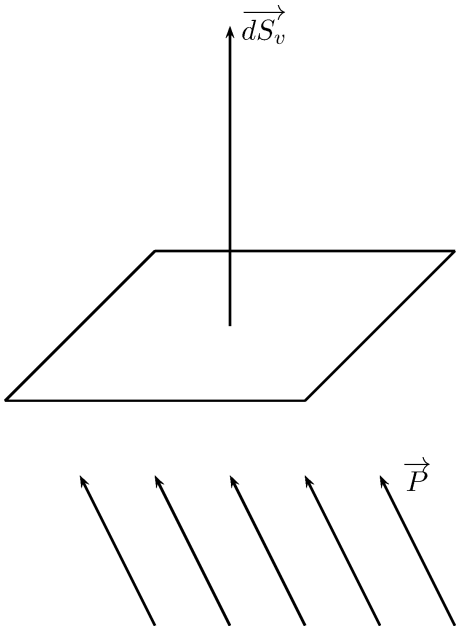


Figure 4.2 – Flux du vecteur de Poynting à travers un élément de surface.

b) Flux élémentaire Le **flux énergétique élémentaire** (en watts), noté $d\Phi$ est la moyenne temporelle du flux instantané :

$$\begin{aligned} d\Phi(\overrightarrow{r}) &= \left\langle \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{dS_v} \right\rangle_t \\ &= \left\langle \left| \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}, t) \right| \overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{dS_v} \right\rangle_t \\ &= \left\langle \left| \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}, t) \right| dS \cos\eta \right\rangle_t \end{aligned}$$

Le flux spectral (en watts par mètres : $W \cdot m^{-1}$) est défini par [Bosser, 2013] :

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda}$$

4.2.1.2 Émission d'un flux

a) Émittance Dans le cas d'une source étendue, l'élément de surface $d\Sigma$ émet un flux énergétique $d\Phi$. On appelle **émittance** (en watts par mètre carré : $W \cdot m^{-2}$), le flux par unité de surface :

$$M = \frac{d\Phi}{d\Sigma}$$

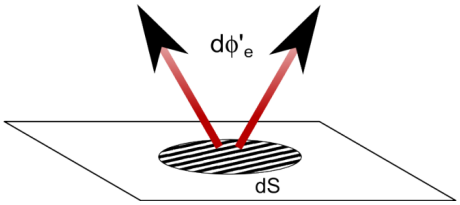


Figure 4.3 – L'émittance. Source : [Géniet, 2013].

L'émittance spectrale (en watts par mètre carré par mètre : $W \cdot m^{-2} \cdot m^{-1}$) est définie par :

$$M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda}$$

b) Intensité L'**intensité** du flux émis (en watts par stéradian : $W \cdot sr^{-1}$) est la densité de flux par angle solide autour de la direction $\overrightarrow{r}(\theta, \varphi)$ de propagation [Labarthe, 2005] :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\overrightarrow{r}) &= \frac{d\Phi(\overrightarrow{r})}{d\Omega_i} \\ &= \left\langle \left| \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}, t) \right| dS \cos\eta \right\rangle_t \frac{r^2}{dS \cos\eta} \\ &\propto E(r)^2 \times r^2 \\ &\propto E_0^2 \end{aligned}$$

Comme on le voit, l'intensité locale finit par ne plus dépendre que de l'amplitude initiale du champ électrique.

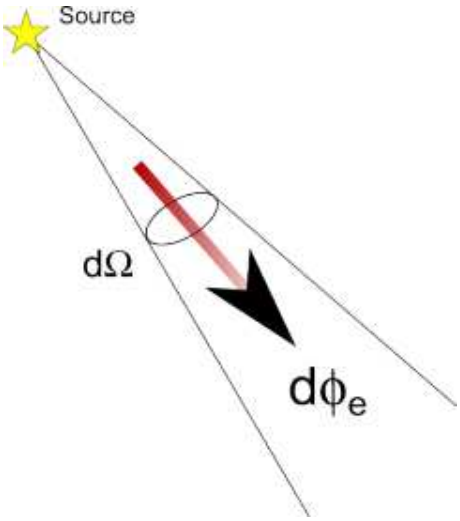


Figure 4.4 – L'intensité. Source : [Géniet, 2013].

L'intensité spectrale (en watts par stéradian et par mètre : $W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-1}$) est définie par [Bosser, 2013] :

$$\mathcal{I}_\lambda = \frac{d\mathcal{I}}{d\lambda}$$

c) Luminance Dans le cas d'une source étendue, chaque élément de surface $d\Sigma$ de la source émet un flux $d\Phi$. La **luminance** (en $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$) est un flux surfacique directionnel par angle solide autour d'une direction $\overrightarrow{r}(\theta, \varphi)$ donnée :

$$\begin{aligned} L &= \frac{d^2\Phi(\overrightarrow{r})}{d\Omega_i d\Sigma} \\ &= \frac{\mathcal{I}(\overrightarrow{r})}{d\Sigma} \\ &= \frac{M}{d\Omega_i} \end{aligned}$$

La luminance, parfois appelée intensité spécifique ou brillance (à l'émission), ou encore radiance, est indépendante de l'émetteur ou du récepteur, et se conserve donc au cours de la propagation. Ceci ouvre la voie à la loi de réciprocité (voir page suivante).

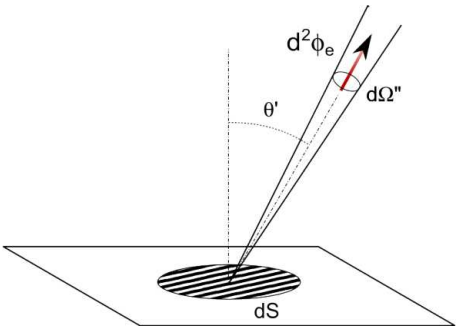


Figure 4.5 – La luminance. Source : [Géniet, 2013].

On définit la luminance spectrale (en watts par stéradian par mètre carré par mètre : $W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2} \cdot m^{-1}$) par [Bosser, 2013] :

$$L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda}$$

4.2.1.3 Réception d'un flux

a) L'éclairement L'**éclairement** $\mathcal{E}$ (en watt par mètre carré : $W \cdot m^{-2}$) est la densité surfacique du flux incident, tel que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\overrightarrow{r}) &= \frac{d\Phi(\overrightarrow{r})}{dS} \\
&= \frac{\left\langle \left| \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r},t) \right| dS\cos\theta \right\rangle_t}{dS} \\
&= \left\langle \left| \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r},t) \right| \right\rangle_t \cos\eta \\
&\propto E(r)^2 \cos\eta \\
&\propto \frac{E_0^2}{r^2}\cos\eta
\end{aligned}$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique en $r = 0$.

On voit donc que l'éclairement mesure l'énergie arrivant effectivement sur la surface dS, et que la situation limite est celle d'une incidence rasante ($\eta = \pi/2$) où l'éclairement est nul. On observe également que, si la définition « standard » de l'éclairement, en tant que densité surfacique de flux, fait intervenir la surface, elle en est en pratique indépendante, dépendant en revanche de l'angle d'incidence.

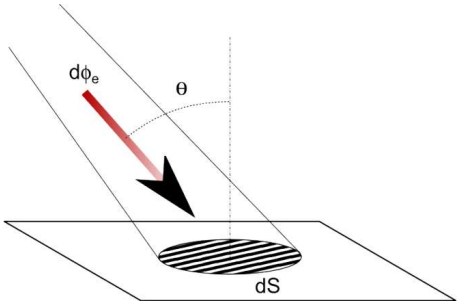


Figure 4.6 – L'éclairement. Source : [Géniet, 2013].

L'éclairement spectral (en watt par mètre carré par mètre : $W \cdot m^{-2} \cdot m^{-1}$) est défini par :

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{d\mathcal{E}}{d\lambda}$$

b) Intensité Si le faisceau est convergent, on peut aussi parler d'intensité reçue, avec la même définition que l'intensité émise.

c) Luminance Si le faisceau est convergent, on peut aussi parler de luminance reçue, avec la même définition que la luminance émise.

4.2.1.4 Synthèse

NOM	EXPRESSION	UNITÉS	TYPE PHYSIQUE
Énergie	E	J	Énergie
Puissance	$\mathcal{P} = dE/dt$	W	Densité temporelle d'énergie
Flux	$d\Phi = \left\langle \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dS}_v \right\rangle_t$	W	Puissance
Éclairement	$\mathcal{E} = d\Phi/dS$	$W \cdot m^{-2}$	Puissance surfacique (reçue)
Intensité	$\mathcal{I} = d\Phi/d\Omega_i$	$W \cdot sr^{-1}$	Puissance par angle solide
Luminance	$L = d^2\Phi / \left(d\Omega_i \overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{d\Sigma}\right)$	$W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$	Puissance surfacique (émise) par angle solide
Émittance	$M = d\Phi/d\Sigma$	$W \cdot m^{-2}$	Puissance surfacique (émise)

4.2.1.5 Loi de réciprocité

Par définition, le flux émis par $d\Sigma$ et reçu par dS est [Bosser, 2013] :

$$d^2\Phi = L\, \overrightarrow{d\Sigma} \cdot \overrightarrow{u_i} d\Omega_i$$

En supposant que l'intégralité du flux émis est transmis, on obtient la **loi de réciprocité**, ainsi exprimée car elle montre que les deux surfaces sont géométriquement interchangeables :

$$\begin{aligned} d^2\Phi &= L\, \frac{\overrightarrow{d\Sigma} \cdot \overrightarrow{u_i} \times \overrightarrow{u_i} \cdot (-\overrightarrow{dS}_{dr})}{r^2} \\ &= L\, \frac{d\Sigma\; dS_{dr} \cos\theta_i \cos\eta_{dr}}{r^2} \end{aligned}$$

On observera ici que le signe $-$ donné à $\overrightarrow{dS}_{dr}$ provient de son orientation vers l'arrière. Cette loi est la traduction immédiate de la conservation de la luminance au cours de la propagation. Ainsi, si on inverse les grandeurs géométriques entre l'émetteur et le récepteur, le flux et la luminance demeurent identiques. On observera qu'on peut assez facilement faire apparaître un éclairement, une émittance ou une intensité à partir de cette relation. Enfin, il est à noter qu'il faudra introduire une transmittance du milieu lorsque celui-ci ne laissera passer qu'une fraction du flux.

Cette relation est absolument incontournable pour l'étude énergétique du rayonnement allant d'une source surfacique vers un récepteur surfacique.

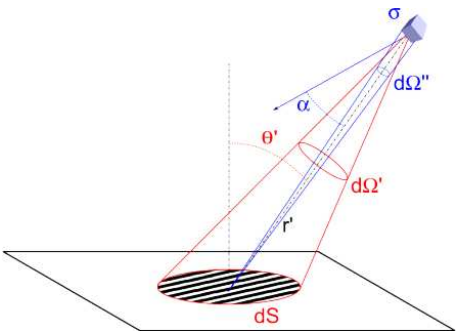


Figure 4.7 – Géométrie du problème de la loi de réciprocité ; les notations de cette figure diffèrent des nôtres. Source : [Géniet, 2013].

4.2.2 Grandeurs visuelles

Les grandeurs physiques abordées précédemment sont remplacées par d'autres grandeurs en ce qui concerne l'usage de l'œil humain comme récepteur.

4.2.2.1 Intensité : la candela

La **candela**, notée *cd*, est une unité de mesure d'intensité lumineuse perçue par l'œil. C'est l'une des sept unités du système international, définie comme suit [1] :

« La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ *hertz (correspondant à une longueur d'onde dans le vide de 555 nm) et dont l'intensité énergétique dans cette direction est* $1/683$ *watt par stéradian »*

Il en résulte que l'efficacité lumineuse spectrale d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ hertz est égale à 683 lumens [2] par watt exactement, $K = 683\ lm/W = 683\ cd \cdot sr \cdot W^{-1}$ [3].

On peut donc aussi exprimer la candela comme :

$$1\ cd \quad = \quad \frac{1}{683} W \cdot sr^{-1} \qquad \text{à } \lambda = 555\ nm$$

ce qui confirme que la candela est une intensité.

4.2.2.2 Éclairement : le lux

Le **lux** est une unité de mesure d'éclairement perçu par l'œil, tel que :

$$1\ lx \quad = \quad 1\ cd \cdot sr \cdot m^{-2}$$

4.2.2.3 Flux : le lumen

Le **lumen** est une mesure de flux lumineux perçu par l'œil tel que :

$$1\ lm \quad = \quad 1\ cd \cdot sr$$

4.2.2.4 Luminance : le nit

Le **nit** est une mesure de luminance perçue par l'œil tel que :

$$1\ nt \quad = \quad 1\ cd \cdot m^{-2}$$

4.2.3 Grandeurs astrophysiques

Au regard des phénomènes qu'elle étudie, l'astrophysique a aussi déployé ses propres grandeurs de mesure de l'énergie associées au rayonnement.

4.2.3.1 L'erg

L'**erg** est une unité d'énergie relevant du système CGS [4]. On a :

$$\begin{aligned} 1\ erg \quad &= \quad 1\ g \cdot cm^2 \cdot s^{-2} \\ &= \quad 10^{-7} J \end{aligned}$$

4.2.3.2 Le rayleigh

Le **rayleigh** mesure l'émission du ciel nocturne du fait de la recombinaison des atomes de la haute atmosphère ; il s'agit d'une luminance du système CGS, qui s'exprime [Léna, 1986] :

$$\begin{aligned} 1\ R \quad &= \quad 10^6 \text{ photons} \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1} \cdot sr^{-1} \\ &= \quad \frac{1,58 \cdot 10^{-11}}{\lambda_{[nm]}} W \cdot cm^{-2} \cdot sr^{-1} \end{aligned}$$

1. http://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/candela.html
2. *Vide infra.*
3. *cf* le site du BIPM cité.
4. Centimètre, gramme, seconde.

4.2.3.3 Le jansky

Le **jansky** [5] est une unité de densité surfacique de flux spectral très utilisé en radioastronomie. On a :

$$1\,Jy \quad = \quad 10^{-26} W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$$

4.2.3.4 La luminosité

La **luminosité** est une mesure de puissance prenant comme unité le flux du Soleil [Acker, 2013] :

$$\begin{aligned} 1\,L &= L_\odot \\ &= 3,826 \cdot 10^{26} W \end{aligned}$$

4.2.3.5 La magnitude

La **magnitude** est une grandeur mesurant la brillance des astres. Cette échelle est logarithmique de base $\sqrt[5]{100} \approx 2,5$ et varie en fonction de flux lumineux reçu par un astre donné dans une bande de longueur d'onde donnée (notée X par exemple). L'expression de cette magnitude est :

$$\begin{aligned} m_B &= -\log_{\sqrt[5]{100}} \left(\frac{\Phi_B}{\Phi_B^0} \right) \\ &= -2,5 \log_{10} \left(\frac{\Phi_B}{\Phi_B^0} \right) \end{aligned}$$

où Φ_B est le flux reçu dans la bande spectrale B, et F_B^0 le flux de référence. Indifféremment, on peut aussi remplacer ces flux par des éclairements ; de la sorte, l'éclairement de référence est, dans le visible :

$$\mathcal{E}_{vis}^0 \quad = \quad 2,87 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2}$$

Historiquement, par convention, on avait imposé que la magnitude de l'étoile Véga, de la constellation de la Lyre, soit nulle, c'est-à-dire que son flux faisait référence. Depuis, l'échelle de magnitude s'est affinée et Véga a désormais une magnitude de 0,03.

Par ailleurs, le signe $-$ indique que les magnitudes décroissent quand le flux lumineux augmente : plus un astre est brillant, plus sa magnitude est basse. Par exemple, celle du Soleil est de -26. Le facteur de baisse du flux quand la magnitude augmente d'une unité est $\sqrt[5]{100}$. À l'œil nu, on peut percevoir des astres jusqu'à une magnitude entre 5,5 et 6.

On parle de **magnitude absolue** pour une magnitude observée à la distance de 10 parsecs (pc), sachant que 1 $pc = 3,26$ al (année-lumière), et qu'une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année.

4.3 Radiométrie des surfaces

4.3.1 Phénomènes radiométriques en surface

Lorsqu'il atteint une surface, le rayonnement peut subir de multiples phénomènes, d'ailleurs souvent couplés : réflexion diffuse, réflexion spéculaire, absorption, transmission par transparence avec réfraction, transmission diffuse (voir figure 4.8 page suivante). Il s'agit d'en étudier à la fois la géométrie et les fractions d'énergie concernées par chaque phénomène.

5. Karl Jansky, 1905 – 1950.

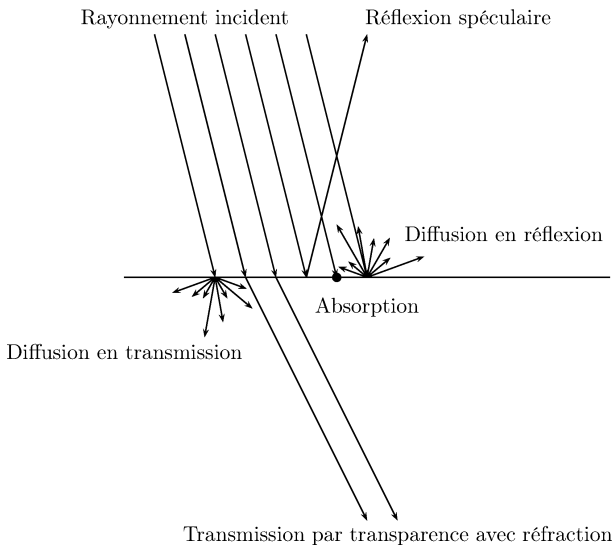


Figure 4.8 – Phénomènes radiométriques en surface.

4.3.2 Surfaces transparentes

On appelle **transmittivité** d'une surface la fraction d'éclairement transmis par rapport à l'éclairement incident, sur l'ensemble des direction :

$$T_\lambda \quad = \quad \frac{\mathcal{E}_{\lambda,t}}{\mathcal{E}_{\lambda,i}}$$

Une surface est transparente dès lors que T est non-nul ; une transmittivité nulle caractérise les surfaces opaques, soit qu'elles soient totalement absorbantes, soit totalement réflexive, soit un peu des deux.

4.3.3 Surfaces réfléchissantes

4.3.3.1 Albédos

De façon générale, on parle d'**albédo** comme le rapport entre deux grandeurs de rayonnement associées à une surface. L'albédo spectral simple, ou réflectivité spectrale (sans unité), s'exprime simplement [Bosser, 2013] :

$$R_\lambda \quad = \quad \frac{M_{\lambda,e}}{\mathcal{E}_{\lambda,i}}$$

où $M_{\lambda,e}$ est l'émittance spectrale, *i.e.* la puissance surfacique (ré-)émise, en l'occurrence réfléchie, par la surface considérée, et $\mathcal{E}_{\lambda,i}$ l'éclairement spectral, donc la puissance surfacique reçue par cette surface, le tout à une longueur d'onde donnée ou sur une bande spectrale donnée. Il est tout-à-fait clair que, dans le cas de diélectriques, cette grandeur est égale au coefficient de réflexion énergétique étudié dans le cas du passage d'une onde électromagnétique d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2. On peut cependant préciser le type d'albédo considéré, et utiliser les albédos géométrique et de diffusion simple.

Si l'émittance est directionnelle, sur une ouverture η_{dr} et que, similairement, l'éclairement incident l'est aussi, avec un incidence d'angle η, alors l'albédo s'écrit :

$$R_\lambda(\eta, \eta_{dr}) \quad = \quad \frac{\pi L_{\lambda,e} \sin^2 \eta_{dr}}{\mathcal{E}_{\lambda,i,\eta} \cos \eta}$$

a) Albédo géométrique On peut s'intéresser à l'albédo géométrique, qui est le rapport entre l'intensité réfléchie par une surface dans sa direction normale et l'intensité totale reçue par la surface [Déau, 2007] :

$$R_{\lambda,g} = \frac{\mathcal{I}_{\lambda,e}(0°)}{\mathcal{I}_{\lambda,i}}$$

b) Albédo de diffusion simple On peut aussi définir l'albédo de diffusion simple [Déau, 2007] :

$$\varpi_0 = \frac{Q_s}{Q_e}$$

où Q_s et Q_e sont respectivement les coefficients de diffusion et d'extinction (voir page page 104 et suivantes).

4.3.4 Surface diffusante

4.3.4.1 Approche de la diffusion par une surface

Une surface est diffusante si le rayonnement qui en émane, qu'il soit émis ou réfléchi, ne l'est pas dans une direction donnée ; ce rayonnement est caractérisé par une distribution de directions dans lesquelles il se propage.

4.3.4.2 Distributions directionnelles des rayonnements diffusés

Ici nous allons signaler l'existence de fonctions permettant de caractériser les surfaces diffusante, que cette diffusion se fasse vers l'avant (au sens du paramétrage déjà vu), c'est-à-dire en transmission, avec la BTDF, ou vers l'arrière, c'est-à-dire en réflexion, avec la BRDF. Dans les deux cas, le rayonnement incident est supposé arriver selon un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_i}$, dans un faisceau d'angle solide $d\Omega_e$, et est observé dans une direction $\overrightarrow{u_d x}$, avec $x = v$ ou x_r. Ainsi, chaque direction pouvait être déterminée par deux angles, les variables de ces fonctions sont au nombre de quatre : $(\varphi_i, \theta_i, \varphi_x, \theta_x)$.

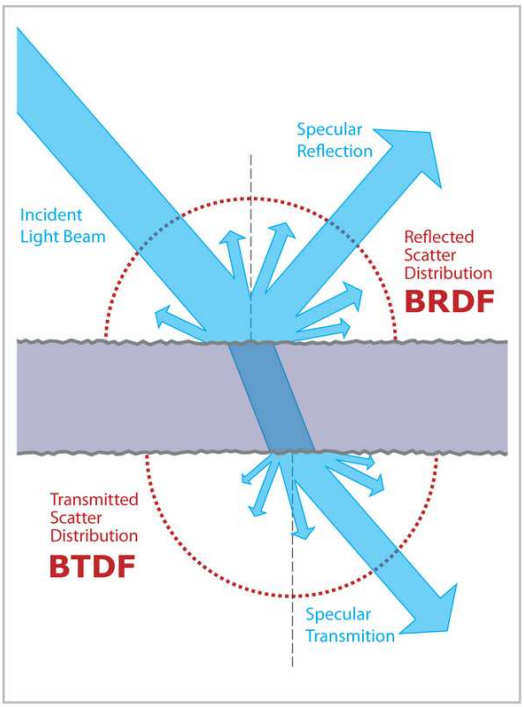


Figure 4.9 – Fonctions bidirectionnelles de distribution de transmission ou de réflexion. Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional_scattering_distribution_function.

a) À la transmission On peut définir une **Fonction Bidirectionnelle de Distribution de Transmission** (*Bidirectional Transmission Distribution Function* – BTDF), notée $T(\overrightarrow{u_{dv}}, \overrightarrow{u_i})$, liant la luminance spectrale transmise $L_{\lambda,t}$ une direction $\overrightarrow{u_{dv}}$ donnée, à la luminance spectrale incidente $L_{\lambda,i}$ dans un angle solide $d\Omega_e$ autour d'une direction $\overrightarrow{u_i}$ donnée[6] [Géniet, 2013] :

6. Naturellement, contrairement à la réflexion, dans le cas de la transmission, les flux lumineux incident et transmis sont situés de part et d'autre de la surface.

$$BTDF_\lambda(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u}_{dv}) = \frac{dL_{\lambda,t}(\overrightarrow{u}_{dv})}{L_{\lambda,i}\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_{dv} d\Omega_e}$$

En vertu de la loi de réciprocité, nous avons :

$$BTDF(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_{dv}}) = BTDF(\overrightarrow{u_{dv}}, \overrightarrow{u_i})$$

La BTDF peut aussi être vue comme le rapport entre la luminance dans la direction $\overrightarrow{u}_{dv}$ et l'éclairement venant de la direction $\overrightarrow{u_i}$.

L'unité de la BTDF est en sr^{-1}, ceci faisant écho à l'absence de $d\Omega_v$, élément d'angle solide de transmission dans sa définition.

b) À la réflexion Compte-tenu des propriétés réflexives variées des surfaces, il convient de tenir compte de la réflectivité dite bi-directionnelle de celle-ci, c'est-à-dire de la fraction de luminance spectrale réfléchie $L_{\lambda,r}$ dans une direction $\overrightarrow{u_{dr}}$ par rapport à la luminance spectrale incidente $L_{\lambda,i}$ pour un angle solide incident $d\Omega_e$ donné centré sur la direction d'incidence $\overrightarrow{u_i}$. La **Fonction Bidirectionnelle de Distribution de Réflectivité** (*Bidirectional Reflectance Distribution Function* – BRDF), s'exprime (en sr^{-1}) :

$$BRDF_\lambda(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u}_{dr}) = \frac{dL_{\lambda,r}(\overrightarrow{u}_{dr})}{L_{\lambda,i}\overrightarrow{u}_i \cdot (-\overrightarrow{u}_{dr}) d\Omega_e}$$

En vertu de la loi de réciprocité, nous avons :

$$BRDF(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_{dr}}) = BRDF(\overrightarrow{u_{dr}}, \overrightarrow{u_i})$$

La BRDF peut aussi être vue comme le rapport entre la luminance dans la direction $\overrightarrow{u}_{dr}$ et l'éclairement venant de la direction $\overrightarrow{u_i}$.

4.3.4.3 Surfaces lambertiennes

a) Définition La **surface lambertienne**[7] un un modèle utilisé lorsque la luminance de la surface est indépendante de la direction, que ce soit en émission ou en réflexion diffuse ; elle est aussi qualifiée de parfaitement diffusante. En d'autres termes, sa BRDF est indépendante de la direction.

Il est à noter que cette définition n'est que théorique et que les surfaces naturelles sont lambertiennes sur une gamme angulaire, jusqu'à 40° voire 60° (neige, salars, déserts) de la normale.

b) Émission par une source ponctuelle lambertienne Si une surface unitaire $d\Sigma$ lambertienne émet du rayonnement, alors par définition sa luminance L_i est isotrope. Si on considère l'angle solide $d\Omega_i$ élémentaire (dirigé vers (θ, φ)) portant ce rayonnement (voir figure 4.10 page suivante), alors :

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{d^2\Phi}{d\Omega_i d\Sigma \cos\theta} \\ &= \frac{dM}{d\Omega_i \cos\theta} \qquad \text{disparition de } d\Sigma \text{ : source ponctuelle} \\ \iff dM &= L_i \cos\theta d\Omega_i \\ &= L_i \cos\theta \ \sin\theta d\varphi \ d\theta \end{aligned}$$

Nous avons ici la relation primaire exprimant l'émittance élémentaire dans un angle solide donné autour d'une direction donnée. On en déduit la relation entre l'émittance de la source ponctuelle est la luminance rayonnée dans le cône d'ouverture α_i (la source étant supposée dans l'axe du cône) :

7. Nom issu de Jean-Henri Lambert (1728 – 1777), également à l'origine de la projection cônique conforme éponyme utilisée en cartographie qui est, en particulier, la projection légale en France.

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad M &= \int_{\theta_i=0}^{\alpha_i} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L_i \cos\theta \ \sin\theta d\varphi \ d\theta \\ \Rightarrow M &= \pi L_i \sin^2 \alpha_i \end{aligned}$$

Il est à noter que nous considérons ici un cas normal ; si d'aventure le cône que nous venons de considérer est dirigé dans une direction faisant un angle θ_i par rapport à la normale, on aurait :

$$M = \pi L_i \sin^2 \alpha_i \cos\theta_i$$

Dans le cas d'un rayonnement hémisphérique, évidemment normal, nous avons donc la relation de proportionnalité suivante entre émittance et luminance émise :

$$M = \pi L_i$$

Il est à noter pour conclure que, contrairement à ce qu'une analyse dimensionnelle trop rapide donnerait, on n'a pas de relation intégrale du type $M = L_i \Omega_i$ ni, par exemple pour le rayonnement hémisphérique, du genre $M = 2\pi L_i$; cette forme d'écriture se trouve en revanche au niveau infinitésimal, comme nous venons de le voir, avec $dM = L_i \cos\theta d\Omega_i$ et c'est en intégrant cette relation que l'on trouve la bonne formulation de la relation entre ces grandeurs.

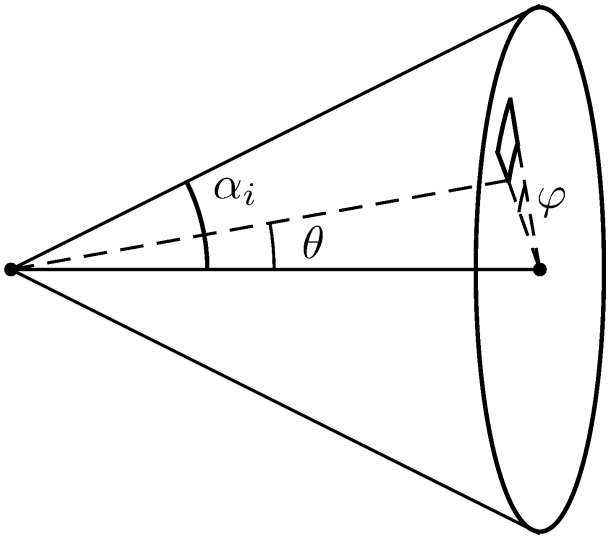


Figure 4.10 – Géométrie cônique lambertienne : source ponctuelle et surface d'observation étendue définie par le cône d'ouverture α_i, avec incidence normale ; par réciprocité, surface d'observation ponctuelle éclairée par une source étendue définie par le cône d'ouverture α_e (non représenté ici), encore avec incidence normale.

c) Éclairement par une source étendue lambertienne Si une surface unitaire $d\Sigma$ lambertienne émet du rayonnement, alors par définition sa luminance L_e est isotrope. On note $d\Omega_e$ l'angle solide élementaire sous lequel elle est vue par un récepteur placé sur l'axe de la surface émettrice. On a alors :

$$\begin{aligned} L_e &= \frac{d^2\Phi}{d\Omega_e dS \cos\theta} \\ &= \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega_e \cos\theta} \qquad \text{disparition de } dS \text{ : récepteur ponctuel} \\ \Longleftrightarrow d\mathcal{E} &= L_e \cos\theta d\Omega_e \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \pi L_e \sin^2 \alpha_e \end{aligned}$$

Là encore, nous considérons ici implicitement la source étendue comme éclairant sous incidence normale ; si d'aventure la source étendue éclaire depuis une direction faisant un angle θ_e à la normale, l'éclairement reçu s'écrit :

$$\mathcal{E} = \pi L_e \sin^2 \alpha_e \cos\theta_e$$

Par conséquent, si le récepteur ponctuel est éclairé par une source lambertienne hémisphérique, alors $\theta_e = \pi/2$ et il reçoit :

$$\mathcal{E} = \pi L_e$$

Nous constatons ici que le raisonnement est totalement identique à celui conduit dans le cas de l'émittance : nous avons en effet une illustration de la loi de réciprocité. Ainsi, nous n'avons pas non plus de relation du type $\mathcal{E} = L_e\Omega_e$ ni, pour l'éclairement hémisphérique, du genre $\mathcal{E} = 2\pi L_e$. Là encore, c'est au niveau infinitésimal que ces relations se trouvent, avec $d\mathcal{E} = L_i \cos\theta d\Omega_e$, relation à intégrer pour obtenir la bonne formulation des relations entre ces grandeurs.

d) Réflexion diffuse lambertienne Le cas de la diffusion réflexive par une surface lambertienne peut être étudié sous l'angle de l'intensité diffusée, de sa BRDF et de son albédo.

i) Loi d'intensité en réflexion diffuse lambertienne On suppose qu'une surface lambertienne dS diffuse un rayonnement qui l'éclaire. Nous avons :

$$\begin{aligned} L_{dr} &= \frac{d^2\Phi}{d\Omega_i dS\cos\theta} \\ &= \frac{d\mathcal{I}(\theta)}{d\Sigma\cos\theta} \\ &= \frac{d\mathcal{I}(\theta=0)}{d\Sigma\underbrace{\cos(\theta=0)}_{=1}} \quad \text{invariance angulaire de la luminance lambertienne} \\ \Rightarrow \mathcal{I}(\theta) &= \mathcal{I}(\theta=0)\cos\theta \end{aligned}$$

Ainsi on voit qu'une source lambertienne, dont par définition la luminance à θ quelconque est égale à celle à $\theta = 0$, a cependant une loi d'intensité diffusée qui dépend de θ.

ii) Albédo d'une surface lambertienne Soit une surface lambertienne éclairée par un éclairement $\mathcal{E}_e$ incident, qu'elle diffuse conformément à ses propriétés, à savoir avec une luminance L_{dr} isotrope. Son albédo R s'exprime :

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{M}{\mathcal{E}_e} \quad \text{introduction d'une émittance} \\ &= \frac{\pi L_{dr}}{\mathcal{E}_e} \end{aligned}$$

iii) BRDF en réflexion diffuse lambertienne Une surface lambertienne éclairée par une luminance L_e sous un angle solide Ω_e et renvoyant une luminance L_{dr}, indépendante par hypothèse de la direction, a une BRDF :

$$\begin{aligned} BRDF &= \frac{L_{dr}}{L_e\Omega_e} \\ &= \frac{L_{dr}}{\mathcal{E}_e} \end{aligned}$$

où on a fait apparaître l'éclairement incident $\mathcal{E}_e$. On peut ainsi lier la BRDF à l'albédo :

$$R = \pi\, BRDF$$

4.3.5 Surfaces absorbantes

On appelle **absorbtivité** d'une surface la fraction d'éclairement absorbé par rapport à l'éclairement incident, sur l'ensemble des directions :

$$A_\lambda = \frac{\mathcal{E}_{\lambda,a}}{\mathcal{E}_{\lambda,i}}$$

4.3.6 Conservation de l'énergie

Il est tout-à-fait évident que le rayonnement incident est soit absorbé, soit transmis, soit réfléchi, autrement dit :

$$A_\lambda + T_\lambda + R_\lambda = 1$$

Exercices recommandés

11.6.1 page 188, 11.6.2 page 188, 11.6.4 page 189, 11.6.5 page 189, 11.6.6 page 190, 11.6.8 page 191, 11.6.8.3 page 191, 11.6.12 page 194.

Troisième partie

Interactions des ondes électromagnétiques avec la matière

Chapitre 5

Le corps noir : approche quantique de l'émission et de l'absorption des ondes électromagnétiques

La problématique de ce chapitre réside dans l'étude de l'émission électromagnétique d'un corps uniquement en fonction de sa température.

5.1 La quantification de l'énergie : le corps noir

5.1.1 Propriétés fondamentales du corps noir

On suppose l'existence d'un corps fictif doté des propriétés suivantes, qu'on appelle le **corps noir** :
— il absorbe tout rayonnement incident, quelle qu'en soit la longueur d'onde λ et la direction d'incidence (φ, θ) ;
— le rayonnement qu'il émet ne dépend que de sa température ; ainsi son émittance s'écrit $M = f(T)$;
— le rayonnement qu'il émet est isotrope ; ainsi sa luminance s'écrit $L(\theta, \varphi) = L$.

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\forall\lambda \quad \forall(\varphi,\theta) \qquad A_\lambda(\varphi,\theta) \;=\; 1$$

Le problème de l'émission du corps consiste à déterminer la loi de distribution B_λ de la luminance de ce corps en fonction de la seule température. Il se trouve que la résolution de ce problème idéal par Max Planck a amené une des plus grandes révolutions de l'histoire en physique, avec la naissance de la physique quantique...

5.1.2 Modèle de Rayleigh-Jeans

On peut modéliser le corps noir comme une cavité cubique, de côté L isolée et à l'équilibre : sa température est uniforme et constante. L'équilibre du corps noir impose que le champ électrique à l'intérieur de la cavité prenne une valeur nulle sur les parois de celle-ci ; en effet, hors de l'état d'équilibre, le champ électrique pourrait être non-nul sur les parois. Or le champ électrique répond nécessairement à une équation d'onde ; en supposant que les trois dimensions de la cavité cubique sont orientées selon un système d'axes (x, y, z), nous avons ainsi [Nave, 2001] :

$$\begin{aligned} \Box E &= 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \end{aligned}$$

La condition de nullité du champ aux limites impose une solution de la forme :

$$E(x,y,z,t) = E_0 \underbrace{\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}\sin\frac{n_z\pi z}{L}}_{\text{partie spatiale}} \underbrace{\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}}_{\text{partie temporelle}}$$

qui est une la représentation d'une onde stationnaire dans une cavité tridimensionnelle. Si nous la réintroduisons dans l'équation d'onde, nous obtenons la relation suivante :

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4\frac{L^2}{\lambda^2}$$

Le décompte du nombre de modes possibles dans la cavité demande de dénombrer le nombre de combinaisons (n_x, n_y, n_z) répondant à cette relation. La physique statistique montre que le nombre de modes possibles pour une longueur d'onde λ donnée pour une telle situation est :

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi}{3}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{3/2} \\ &= \frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \end{aligned}$$

Le nombre de modes par unité de longueur d'onde (puis par unité de fréquence) et par unité de volume est :

$$\begin{aligned} n_\lambda &= \frac{1}{L^3}\frac{dN}{d\lambda} \\ &= -\frac{8\pi}{\lambda^4} \\ n_\nu &= \frac{1}{L^3}\frac{dN}{d\nu} \\ &= \frac{1}{L^3}\frac{dN}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\nu} \\ &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \\ \text{car : } \quad \lambda &= \frac{c}{\nu} \\ \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\nu} &= -\frac{c}{\nu^2} \end{aligned}$$

Le signe négatif obtenu pour n_λ signifie que le nombre de mode décroît lorsque la longueur d'onde augmente. Le signe est naturellement opposé pour n_ν, la longueur d'onde et la fréquence évoluant comme des inverses.

Le postulat de Rayleigh[1] et Jeans[2] consista à supposer que chaque mode d'onde stationnaire est associé à l'énergie thermodynamique moyenne kT, avec k **la constante de Botzmann**[3] :

$$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$$

C'est l'équipartition de l'énergie entre les modes. L'énergie émise par unité de fréquence et par unité de volume (en joules par mètre cube et par hertz : $J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$) s'exprime :

1. John William Strutt Rayleigh, 1842 – 1919.
2. James Hopwood Jeans, 1877 – 1946.
3. Ludwig Eduard Boltzmann, 1844 – 1906.

$$\begin{aligned}\frac{du(T)}{d\nu} &= \frac{dE}{dV d\nu} \\ &= \frac{1}{L^3}\frac{dE}{d\nu} \\ &= n_\nu kT \qquad \text{postulat RJ : } \frac{dE}{d\nu} = kT \\ &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\end{aligned}$$

L'énergie émise par unité de fréquence, par unité de volume et par unité d'angle solide (en joules par mètre cube, par hertz et par stéradian : $J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}$) est :

$$\begin{aligned}\frac{du(T)}{d\Omega d\nu} &= \frac{1}{4\pi}n_\nu kT \\ &= \frac{2\nu^2}{c^3}kT\end{aligned}$$

Enfin, l'énergie se propageant à la vitesse c, la quantité d'énergie par unité de fréquence par unité d'angle solide et par unité de temps franchissant chaque élément de surface (en watts par mètre carré, par hertz, par stéradian : $W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}$) est :

$$\begin{aligned}B_\nu(T) &\equiv \frac{du(T)}{d\Omega dS d\nu dt} \\ &= c\frac{2\nu^2}{c^3}kT \\ &= \frac{2\nu^2}{c^2}kT\end{aligned}$$

Ces trois expressions peuvent être réécrites en fonction de la longueur d'onde, respectivement :

$$\begin{aligned}\frac{du(T)}{d\lambda} &= \frac{8\pi}{\lambda^4}kT \qquad \left[J \cdot m^{-3} \cdot m^{-1}\right] \\ \frac{du(T)}{d\Omega d\lambda} &= \frac{2}{\lambda^4}kT \qquad \left[J \cdot m^{-3} \cdot sr^{-1} \cdot m^{-1}\right] \\ B_\lambda(T) &= \frac{du(T)}{d\Omega dS d\lambda dt} \\ &= \frac{2c}{\lambda^4}kT \qquad \left[W \cdot m^{-2} \cdot m^{-1} \cdot sr^{-1}\right]\end{aligned}$$

La loi de Rayleigh-Jeans fonctionnait bien pour les longueur d'ondes assez longues, mais fut finalement invalidée par l'expérience car elle prévoit trop d'énergie pour les courte longueurs d'onde que l'on en observe (« catastrophe de l'ultra-violet »).

5.1.3 Modèle de Wien

La difficulté à représenter l'émission en hautes fréquences trouva sa solution dans l'hypothèse, formulée par Wien [4], selon laquelle, aux hautes fréquences, l'énergie à déployer pour l'émission d'un photon (même si ce concept n'existait pas encore) était plus élevée, et que la probabilité d'émettre à de telles fréquences était plus basse. Il proposa donc de pondérer la densité spectrale d'énergie par la probabilité d'émettre l'énergie $h\nu$ avec la fonction $\exp(-h\nu/kT)$, et donna l'expression suivante, dont la forme moderne est [Duvel, 2011] :

$$\begin{aligned}B_\nu(T) &= \frac{2\nu^2}{c^2}h\nu\, e^{-h\nu/kT} \qquad [W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}] \\ B_\lambda(T) &= \frac{2c}{\lambda^4}\frac{hc}{\lambda}\, e^{-hc/\lambda kT} \qquad [W \cdot m^{-2} \cdot m^{-1} \cdot sr^{-1}]\end{aligned}$$

4. Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien, 1864 – 1928.

On aura observé que les unités ne sont pas modifiées, $h\nu$ étant homogène à une énergie de la même façon que kT. Cette relation est la loi de Wien, qui, à une température fixée, prévoit qu'il existe une fréquence correspondant à un maximum d'émission. Cette relation s'avéra décrire correctement l'émission des hautes fréquences du corps noir, mais pas les basses fréquences. C'est Max Planck (1858 – 1947) qui fit la jonction entre les modèle de Rayleigh-Jeans et de Wien.

5.1.4 Modèle de Planck

5.1.4.1 Hypothèse fondamentale de Planck

L'hypothèse fondamentale de Planck consista à considérer que la distribution d'énergie pour une fréquence donnée n'était pas continue, mais discrète, et se comptait comme **un multiple entier d'une quantité élémentaire d'énergie proportionnelle à la fréquence** ν. Ces quantités élémentaires furent appelées quantas, et la constante de proportionnalité, notée h, prit naturellement le nom de **constante de Planck**.

L'énergie associée à une fréquence ν est la somme des énergies, pondérées chacune par sa probabilité, de chacun des états n des modes possibles pour cette fréquence ; pour des raisons de normalisation, cette somme est divisée par la somme des probabilités des n états. Cette idée, centrale en mécanique quantique, est formulée ainsi dans le cas du corps noir [Duvel, 2011] :

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= \frac{2\nu^2}{c^2} E_\nu(T) \\ \text{avec :} \quad E_\nu(T) &= h\nu \left(\frac{\sum_{p=0}^{\infty} p e^{-ph\nu/kT}}{\sum_{p=0}^{\infty} e^{-ph\nu/kT}} \right) \end{aligned}$$

On constate avoir besoin de résultats mathématiques, comme la somme des termes d'une série géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} x^p &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{p=0}^{\infty} p x^p &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ \text{avec :} \quad x &= e^{-h\nu/kT} \\ \text{d'où :} \quad E_\nu(T) &= \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \end{aligned}$$

On aboutit finalement à la **loi de Planck** :

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad \left[W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot Hz^{-1}\right] \\ B_\lambda(T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \qquad \left[W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot m^{-1}\right] \end{aligned}$$

où ces grandeurs sont des luminances spectrales.

5.1.4.2 Loi de déplacement de Wien

En posant comme paramètre :

$$x = \frac{hc}{\lambda kT}$$

et en dérivant la loi de Planck par rapport à x, on peut trouver la valeur de x annulant la dérivée, donnant le maximum spectral d'émission à une température donnée. Cette loi est la **loi de déplacement de Wien** :

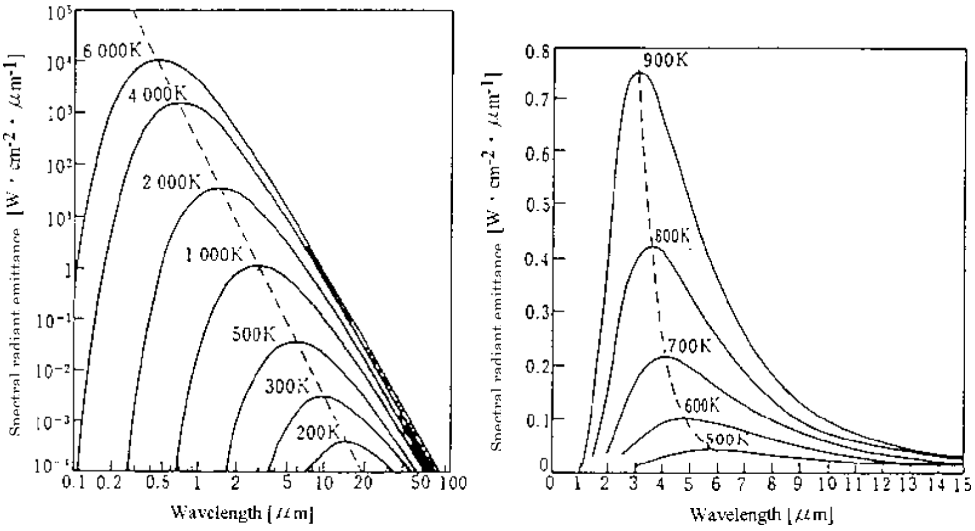


Figure 5.1 – Emittance spectrale des corps noirs. Source : http://www.infraredtraininginstitute.com/black-body-radiation/

$$\begin{aligned} \lambda_{max} T &= \sigma_w \\ \text{avec :} \quad \sigma_w &= 2,898 \cdot 10^{-3} K \cdot m \qquad \text{la constante de Wien} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le maximum d'émission suit une loi inverse de la température, et donc que plus la température est élevée, plus la longueur d'onde du maximum d'émission est courte.

5.1.4.3 Loi de Stephan-Boltzmann

Si, à une température donnée, on calcule l'intégrale de la luminance spectrale de Planck sur l'ensemble des fréquences, on a sa luminance totale. Ainsi :

$$B(T) \equiv \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu$$

Cette surface étant lambertienne[5], son émittance[6] hémisphérique s'exprime :

$$\begin{aligned} M(T) &= \pi B \qquad [W \cdot m^{-2}] \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \end{aligned}$$

En procédant au changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{h\nu}{kT} \\ \Rightarrow du &= \frac{h}{kT} d\nu \end{aligned}$$

on obtient :

$$M(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du}_{= \frac{\pi^4}{15}}$$

5. Voir l'expresssion de l'émittance lambertiennee dans le cas hémisphérique page 56.
6. Voir la définition de l'émittance page 48.

D'où la **relation de Stephan**[7]**-Boltzmann** :

$$\begin{aligned} M(T) &= \sigma T^4 \qquad [W \cdot m^{-2}] \\ \text{avec :} \quad \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4} \qquad \text{la constante de Stephan-Boltzmann} \end{aligned}$$

Cette relation prouve qu'un corps de température nulle n'émet aucun rayonnement dans aucune longueur d'onde ; toutefois, la dépendance en puissance quatrième de la température montre que la quantité de rayonnement, toutes longueurs d'onde confondues, augmente puissamment avec celle-ci.

Il est à noter aussi que l'on peut retrouver la proportionnalité entre émittance et la puissance quatrième de la température par des éléments de thermodynamique et de cinétique des gaz, mais alors sans pouvoir déterminer la valeur de la constante de Stefan-Boltzmann.

5.1.4.4 Température de brillance

On appelle **température de brillance**, à une longueur d'onde donnée, la température obtenue en inversant la loi de Planck, ce qui suppose de connaître la luminance spectrale du corps en question à cette longueur d'onde. La température de brillance s'exprime :

$$T_b(\lambda) = \frac{hc}{k\lambda \ln\left(\frac{2hc^2}{B_\lambda \lambda^5} + 1\right)}$$

Cette température n'est cependant pas la température thermodynamique du corps noir, car elle ne répond qu'à une fréquence donnée, et pas à l'ensemble du spectre.

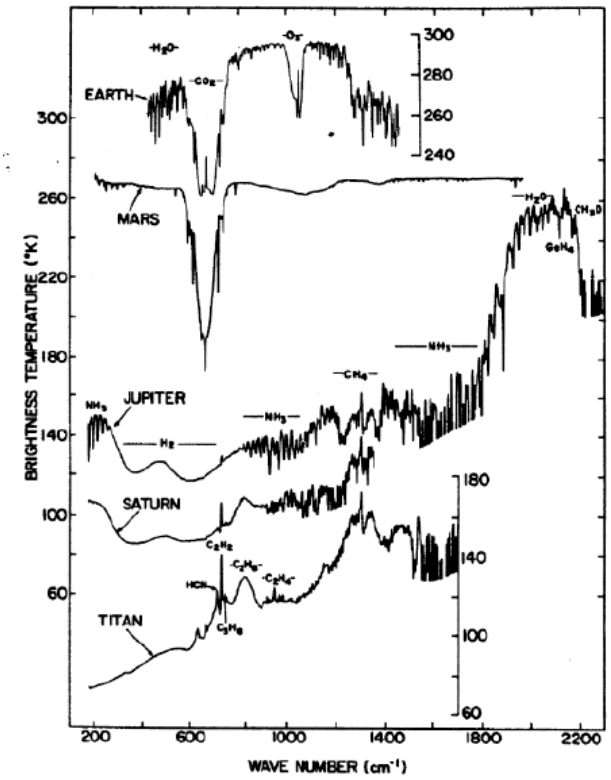


Figure 5.2 – Courbes de températures de brillance spectrale de plusieurs planètes, puis de Jupiter et Saturne, dans l'infrarouge. Source : http://lasp.colorado.edu/~bagenal/3720/CLASS5/5Spectroscopy.html.

5.1.4.5 Température effective

La **température effective** est la température répondant à la loi de Stephan-Boltzmann. C'est la température nécessaire pour qu'un corps noir émette une émittance spectrale mesurée. Ce n'est pas la

7. Joseph Stefan, 1835 – 1893.

température thermodynamique que d'un corps noir ; un corps émettant du rayonnement mais autrement qu'un corps noir, ou bien qui réfléchit le rayonnement d'un autre corps, aura une température effective distincte de sa température thermodynamique.

5.1.5 Surface émettrice réelle

Le corps noir n'étant qu'un modèle, on peut étudier le comportement des surfaces émettrices réelles, par comparaison avec celle du corps noir.

5.1.5.1 Émissivité

Une surface émettrice réelle ne se comporte pas nécessairement comme une surface de corps noir. Sa luminance réelle rapportée à la luminance du corps noir à la même température forme **l'émissivité** :

$$\epsilon_\lambda = \frac{L_{\lambda,e}(T)}{B_{\lambda,e}(T)}$$

Il s'agit donc du rapport entre luminance spectrale réellement émise à la température T et la luminance spectrale du corps noir à T. Il faut naturellement introduire la température T de la surface étudiée pour connaître la luminance de référence (du corps noir) à cette température, et donc à cette longueur d'onde.

5.1.5.2 Loi de Kirchhoff

Un corps réel à l'équilibre radiatif et thermique a une émissivité spectrale égale à l'absorptivité spectrale : il émet un rayonnement avec autant d'efficacité qu'il en reçoit :

$$\epsilon_\lambda = A_\lambda$$

C'est la **loi de Kirchhoff**[8].

Un corps opaque réel, contrairement au corps noir, est d'ailleurs en mesure de réfléchir une part du rayonnement incident, si bien que les lois de conservation nous disent que :

$$\begin{aligned} \epsilon_\lambda &\equiv A_\lambda \\ &= 1 - R_\lambda \end{aligned}$$

5.1.5.3 Corps gris

On appelle **corps gris** un corps dont l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde.

5.1.5.4 Température de brillance

La loi de Wien appliquée à un corps réel écrit l'égalité du produit de son émissivité ϵ par la puissance quatrième de sa température réelle T avec la puissance quatrième de sa température de brillance[9] T_b :

$$\epsilon T^4 = T_b^4$$

5.2 Introduction à la description quantique de l'interaction entre l'atome et la lumière

5.2.1 Un fait expérimental : les raies spectrales

Si le modèle du corps noir quantifie l'énergie émise au niveau microscopique, il ne prévoit cependant pas que les spectres ne manifestent un quelconque caractère discret : en effet, la fonction de Planck est

8. Gustav Robert Kirchhoff, 1824 – 1887.
9. Voir page précédente.

une fonction continue.

On observe cependant qu'un spectre d'émission d'un gaz peu dense prend la forme de raies, de pics, correspondant à certaines longueurs d'onde de rayonnement.

À l'inverse, si on observe le spectre d'une source chaude de spectre continu à travers la même substance gazeuse, toujours à faible densité, la distribution continue du spectre de la source chaude est marquée de pertes aux mêmes longueurs d'onde.

Cette observation s'interprète en rompant avec le modèle de continuité de l'énergie et du rayonnement : les atomes ne peuvent pas émettre ou absorber n'importe quel rayonnement. C'est en étudiant la structure de l'atome et ses interactions avec la lumière que l'on peut mettre en évidence et quantifier cette propriété.

Les raies spectrales prennent en général le nom de **raies de Fraunhofer** [10].

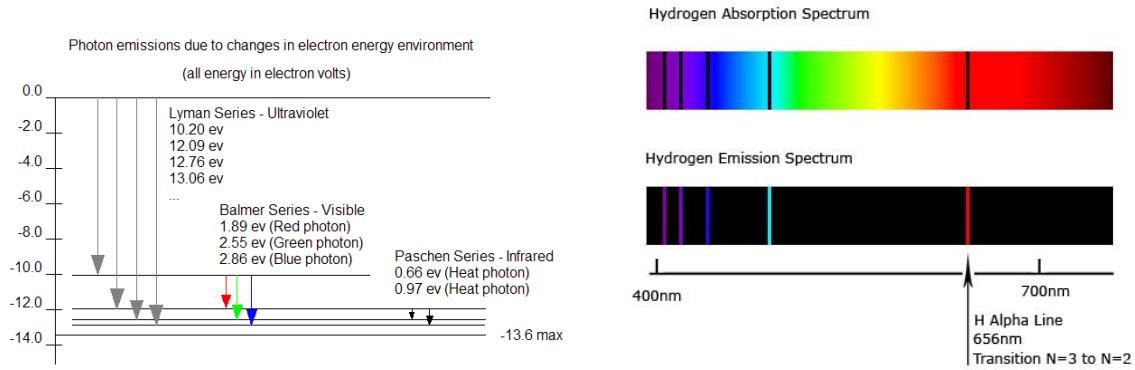


Figure 5.3 – Séries spectrales de l'hydrogène, et spectre d'absorption et d'émission de cet élément dans le visible.

5.2.2 L'atome

L'atome est constitué d'un noyau central autour duquel des électrons se déplacent. Cette structure très générale fut mise en évidence par Rutherford [11], qui en fut récompensé par le prix Nobel de chimie en 1908. L'exploration de l'atome permet de plonger au cœur du modèle standard des particules élémentaires (voir figure 5.4 page 70).

5.2.2.1 Le noyau

a) Nucléons Le noyau est fait de deux types de particules :
— les **protons**, de charge positive $+e$, de masse $1,672622 \cdot 10^{-27} kg$;
— les **neutrons**, de charge nulle, de masse proche de celle du proton, à savoir $1,67493 \cdot 10^{-27} kg$.

Constituant le noyau atomique, le proton et le neutron forment les **nucléons**. Composés de quarks, ils appartiennent à la famille des **hadrons** ; étant parmi les plus lourds, ils en constituent le groupe des **baryons**. De spin $1/2$ [12], ils obéissent aux lois relatives à la famille des **fermions** [13], en particulier le principe d'exclusion de Pauli [14], selon lequel deux fermions ne peuvent pas se trouver dans le même état, autrement dit au même endroit et dans le même état quantique.

L'interaction de liaison des quarks pour former les protons est **l'interaction forte**. L'interaction de liaison des nucléons pour former les noyaux est **l'interaction faible**.

10. Joseph von Fraunhofer, 1787 – 1826.
11. Ernest Rutherford, 1871 – 1937.
12. Voir page 70.
13. De Enrico Fermi, 1901 – 1954.
14. Wolfgang Ernst Pauli, 1900 – 1958.

Le nombre de nucléons dans un noyaux est appelé nombre de masses, et est noté A ; le nombre de protons est appelé nombre de charge, qui est noté Z. Le nombre de charge définit l'élément chimique.

b) Isotopie Il n'y a pas de relation particulière liant les nombres A et Z, si bien que pour un nombre de charge Z donné, plusieurs nombres de masse A sont possibles, traduisant le fait que le nombre de neutrons du noyau n'a pas forcément une valeur unique pour un élément chimique donné : l'ensemble des types d'atomes possibles formés par les différentes valeurs prises par le nombre de masse est appelé ensemble des **isotopes**. Des considérations énergétiques amènent cependant au constat que tous les isotopes ne sont pas possibles ni n'ont la même stabilité : le phénomène de radioactivité en est la conséquence.

5.2.2.2 Les électrons

Les **électrons** sont des particules de charge négative $-e$, de masse $9,109 \cdot 10^{-31} kg$. La preuve directe du caractère discret de l'électricité, preuve de l'existence d'une particule appelée électron, fut fournie en 1911 par Millikan [15], qui mesura à cette occasion sa charge, ce qui lui valut le prix Nobel de physique en 1923. De spin 1/2, l'électron est aussi un **fermion**, mais du groupe des **leptons** ; à ce titre, il n'est pas sensible à l'interaction forte.

a) Charge électrique atomique L'atome est globalement neutre électriquement, si bien que le nombre d'électrons d'un atome est normalement égal au nombre de protons. Il arrive cependant que, pour des raisons de stabilité, l'atome perde ou gagne des électrons : il forme alors un **ion**.

b) Volume atomique Rutherford a prouvé que le noyau atomique est très petit au regard des dimensions de l'atome, qui sont celle de l'éloignement maximal des électrons. Comme, de surcroît, le noyau contient l'essentiel de la masse de l'atome, on peut affirmer que l'atome est lacunaire, et qu'il est principalement constitué de vide.

5.2.2.3 Le cas le plus simple : l'atome d'hydrogène

La description de **l'atome d'hydrogène** est simple et constitue un cas rare où l'approche classique rejoint l'approche quantique. On doit à Bohr [16] d'avoir élaboré ce modèle, lequel explique les raies spectrales de l'hydrogène ; il reçut le prix Nobel de physique en 1922.

Dans le modèle de Bohr, un seul électron est en orbite circulaire autour du noyau, formé de seulement un proton. Dans le référentiel de l'électron, celui-ci est donc soumis à deux forces [Ngô & Ngô, 2005] :
— la force électrostatique que le proton exerce sur lui, radiale centripète, de module $e^2/4\pi\epsilon_0$;
— la force radiale centrifuge, de module $m_e v^2/r$.

Dans ce référentiel, l'électron est au repos, et donc son accélération est nulle, si bien que les deux forces sont égales ; d'où :

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Cette équation est valable quel que soit r, si bien que toutes les orbites électroniques sont possibles ; dès lors, toutes les énergies le sont aussi, ce qui est contraire à l'expérience. Bohr a alors postulé que le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié, et ne peut prendre que des valeurs multiples de la constante de Planck réduite :

$$m_e v r = n\hbar$$

n est appelé nombre quantique principal. Ainsi, par élimination de la vitesse des deux équations, nous obtenons la quantification du rayon des orbites possibles :

$$r = n^2 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

15. Robert Andrews Millikan, 1868 – 1953.
16. Niels Henrik David Bohr, 1885 – 1962.

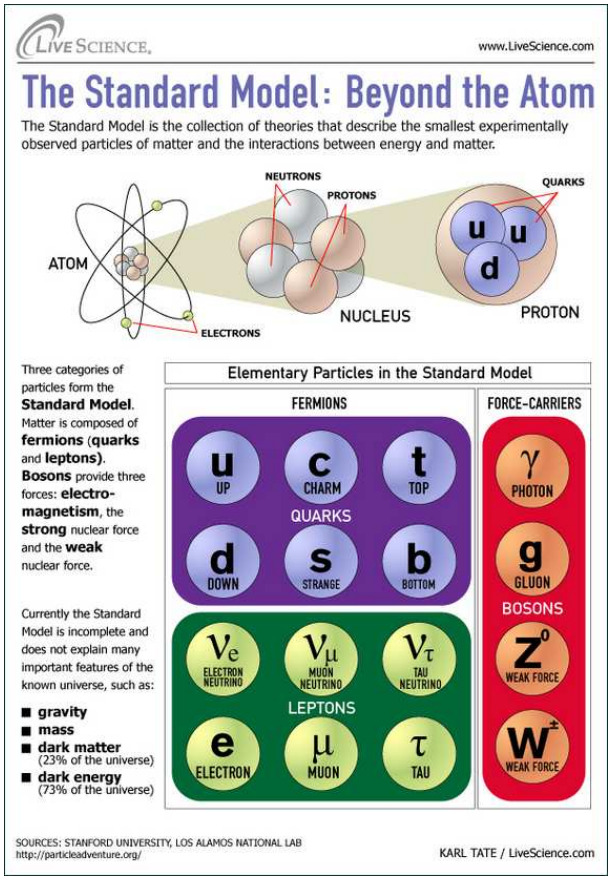


Figure 5.4 – Les particules élémentaires du modèle standard. Source : site internet d'Àrpad Kurusa, université de Szeged, à l'adresse http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/blogs/others-blog/118-elementary-particles**.**

Pour $n = 1$, on a le rayon le plus bas, appelé rayon de Bohr :

$$a_0 = 52,9\ pm$$

L'énergie totale de l'électron est la somme de l'énergie cinétique $m_e v^2/2$ et de son énergie potentielle $-e^2/4\pi\epsilon_0 r$. On peut ainsi l'exprimer :

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2$$

Le niveau énergétique fondamental, correspondant à $n = 1$, vaut :

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \\ &= -13,6\ eV \end{aligned}$$

5.2.3 Nombres quantiques

La structure des atomes autres que l'hydrogène n'est véritablement expliquée que par l'intervention de la théorie de la **mécanique quantique** afin de modéliser les relations entre le noyau et le cortège électronique. En effet, contrairement au cas de l'hydrogène, il est nécessaire, dans le cas général, de faire intervenir d'autres nombres entiers que le nombre quantique principal pour faire état du comportement des électrons autour du noyau ; chacun de ces nombres touche à une grandeur physique particulière.

La mécanique quantique repose notamment sur **l'équation de Schrödinger** :

$$i\,\hbar\,\frac{d}{dt}\;|\Psi(t)\rangle \;\;=\;\; \hat{\mathbf{H}}\;|\Psi(t)\rangle$$

où i est le nombre complexe, $\hbar$ la constante de Planck réduite, $|\Psi(t)\rangle$ le vecteur d'état de la fonction d'onde du système étudié, en tant qu'élément d'un espace de Hilbert [17], et $\hat{\mathbf{H}}$ l'opérateur hamiltonien (dépendant du temps) associé à l'énergie du système. En mécanique quantique, chaque grandeur physique observable est associée à un opérateur ; les valeurs mesurables de cette grandeur physique sont les valeurs propres de cet opérateur, et sont donc associées chacune à un état particulier du système, qui est un vecteur propre de l'opérateur.

Lorsqu'on résout l'équation de Schrödinger pour un système quantique quelconque, en particulier un atome, quatre nombres, dits **nombres quantiques** interviennent dans la quantification des états de celui-ci. Ces nombres sont en fait ceux des électrons de valence, ceux de la couche périphérique :

- le **nombre quantique principal**, n : il quantifie l'énergie du système noyau-électron ; il s'agit d'un entier supérieur ou égal à 1, définissant la couche électronique au sein de laquelle se trouve l'électron considéré : couche K ($n = 1$), L ($n = 2$), M ($n = 3$), etc. ;
- le **nombre quantique secondaire** (ou azimutal), ℓ : il définit la géométrie de l'espace de probabilité de présence de l'électron (encore appelé « orbitale atomique ») ou, de façon équivalente, quantifie le moment cinétique orbital de l'électron, dont le carré vaut : $L^2 = \hbar^2\ell(\ell+1)$. Ses valeurs possibles, qui sont entières, dépendent de celle de n : $0 \leq \ell \leq n-1$. La valeur de ℓ indique le bloc d'appartenance de l'électron : bloc s ($\ell = 0$), blocs p ($\ell = 1$), d ($\ell = 2$), f ($\ell = 3$), g ($\ell = 4$), h ($\ell = 5$), etc. ; le couple de nombres $\{n;\ell\}$ définit une sous-couche électronique, que l'on note par le nombre quantique principal n suivi de la lettre désignant le bloc concerné ; à noter enfin que, dans la classification périodique des éléments, les électrons occupent les positions telles que $n+\ell$ soit croissant, et si deux électrons ont la même valeur de $n+\ell$, alors celui dont n est le plus petit occupe l'état de plus faible énergie (règle de Hund [18]) ;
- le **nombre quantique magnétique** m_ℓ : il quantifie la projection du moment cinétique orbital de l'électron sur un axe particulier ou, autrement dit, définit l'orientation de l'orbitale atomique, c'est-à-dire celle du moment magnétique de l'électron. Il s'agit d'un nombre entier relatif tel que : $-\ell \leq m_\ell \leq \ell$; le nombre de valeurs de m_ℓ possibles à ℓ donné fournit le nombre d'orbitales atomiques possibles pour une sous-couche donnée, ce qui signifie que le triplet de nombres $\{n;\ell;m_\ell\}$ définit une et une seule orbitale atomique, encore appelée case quantique (voir figure 5.5 page suivante) ;
- le **nombre quantique de spin** m_s : il quantifie le moment magnétique propre d'une particule. Les particules qui sont des bosons ont un nombre quantique de spin entier ; mais les particules qui ont un nombre quantique demi-entier sont appelées fermions. Les électrons, qui sont des fermions, ont un spin qui peut prendre deux valeurs seulement : $+1/2$ ou $-1/2$; ainsi chaque case quantique ne peut contenir que deux électrons. De la sorte, le quadruplet $\{n;\ell;m_\ell;m_s\}$ définit un et un seul électron. Le principe d'exclusion de Pauli, selon lequel deux fermions ne peuvent se trouver dans le même état, se trouve ainsi vérifié.

Toutefois, un examen approfondi des interactions au sein de l'atome conduit à prendre en compte de nouvelles structures :

- la **structure fine** : en prenant en compte le couplage entre moment magnétique de spin de l'électron (d'opérateur associé $\hat{S}$, de nombre quantique m_s) et le champ magnétique qu'il ressent du fait de son mouvement par rapport au noyau chargé, d'opérateur associé $\hat{L}$ et de nombre quantique ℓ, encore appelé interaction spin-orbite ou L-S, il apparaît un moment cinétique résultant d'opérateur $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$. Le nombre quantique j qui quantifie les valeurs possibles de J (en tant que grandeur physique, parmi les valeurs propres de l'opérateur $\hat{J}$) est associé à un couple (ℓ, m_s) donné et il prend les valeurs demi-entières telles que : $|\ell - m_s| \leq j \leq \ell + m_s$; le nombre de valeurs de j possibles correspond au nombre d'états de structure fine possibles à l'intérieur d'un état (ℓ, m_s) donné. Notons pour la partie culturelle que la découverte de la structure fine de l'hydrogène atomique a valu le prix Nobel de physique 1955 à Willis Eugene Lamb [19] ;
- la **structure hyperfine** : en prenant en compte le couplage entre le moment magnétique total de l'électron déterminé pour la structure fine d'opérateur $\hat{J}$ avec le moment magnétique de spin

17. David Hilbert, 1862 – 1943.
18. Friedrich Hund, 1896 – 1997.
19. 1913 – 2008.

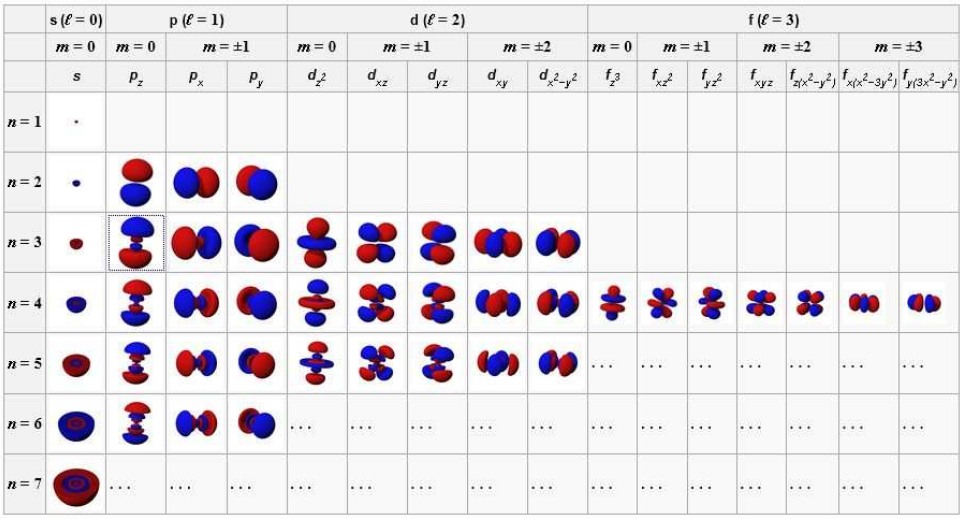


Figure 5.5 – Représentation des orbitales atomiques selon les nombres quantiques. Source : http://www.quirkyscience.com/wp-content/uploads/2013/03/Atomic-Orbitals-Image-by-Dhatfield-Wikimedia-Commons.jpg.

du noyau, d'opérateur $\hat{I}$, il apparaît un moment magnétique d'opérateur $\hat{F}$ tel que $\hat{F} = \hat{J} + \hat{I}$. Le nombre quantique de spin du noyau est noté par un I majuscule. Le nombre quantique qui quantifie les valeurs possibles de F est noté F majuscule, et est associé à un couple ℓ, j donné, mais dépend du nombre I en prenant les valeurs entières telles que : $|I-j| \leq F \leq I+j$. Le nombre de valeurs de F correspond au nombre d'états possibles de structure hyperfine au sein d'un état ℓ, j donné ;

— d'autres subtilités apparaissent lorsque l'on intègre les corrections apportées par l'électrodynamique quantique (incluant l'interaction faible), puis la chromodynamique quantique (avec l'interaction forte).

5.2.4 Niveaux énergétiques atomiques et rayonnement

Nous savons désormais que l'énergie des atomes est quantifiée et fait, dans la plupart des cas, intervenir une description fort complexe. Le passage d'un niveau énergétique à l'autre peut néanmoins être décrit assez simplement, comme lié à l'interaction de l'atome avec la lumière.

5.2.4.1 La nature corpusculaire de la lumière

a) Preuves expérimentales Tout comme les raies de Fraunhofer ont obligé à une description discrète des niveaux énergétiques des atomes (ce que permettait la théorie de Planck sur le corps noir), plusieurs faits expérimentaux ont amené à concevoir la lumière, non plus seulement comme une onde, mais comme une particule.

i) Effet photoélectrique Si la théorie de Planck prévoyait que les échanges entre matière et rayonnement se faisaient par paquets d'énergie $h\nu$, il n'avait cependant pas envisagé la nature de ces paquets.

Un phénomène, appelé **effet photoélectrique**, permit à Albert Einstein (1879 – 1955) de postuler la nature de ces quantas d'énergie. En effet, si l'on éclaire une substance avec un flux lumineux, on observe que, quelle que soit la puissance du flux lumineux incident, la substance libère des électrons uniquement si la longueur d'onde du rayonnement incident est inférieure à une limite notée λ_0 associée à une fréquence ν_0. Einstein postula que ces quantas prenaient la forme d'une particule d'énergie $h\nu$, et que son absorption par un atome de la substance permettait à l'électron de s'échapper, avec une énergie cinétique $m_e v^2/2$. La conservation de l'énergie s'écrit ainsi :

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2}m_e v^2$$

Le seuil minimal d'énergie à apporter par le rayonnement est donc $h\nu_0$. On peut donc apparenter le rayonnement portant cette énergie à une particule ; celle-ci fut par la suite appelée photon. C'est en 1905 qu'Einstein publia le premier de ses quatre articles fondateurs[20], sur le sujet de l'effet photoélectrique. Il fut décoré du prix Nobel de physique en 1921 pour cette explication (et non pour l'élaboration de la théorie de la relativité).

ii) Effet Compton En 1917, appliquant la théorie de la relativité restreinte au photon, Einstein lui attribua une quantité de mouvement $p = h\nu/c$. En effet, la masse du photon étant nulle, nous pouvons écrire ainsi son énergie [Hladik & Chrysos, 2000] :

$$\begin{aligned} E &= c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} && \text{cas général d'une particule de masse } m_0 \text{ au repos} \\ &= cp \\ \text{d'où :}\quad p &= \frac{E}{c} \\ &= \frac{h\nu}{c} \\ &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

En 1923, Arthur Compton (1892 – 1962) réalisa une expérience de diffusion de rayons X prouvant le caractère corpusculaire des photons. En effet, envoyant un faisceau lumineux sur un matériaux contenant des électrons libres (un métal par exemple), il montra que l'interaction entre la lumière et ceux-ci pouvait être interprétée comme la collision de deux particules. On suppose, comme Einstein, que le photon a une quantité de mouvement $p_1 = h\nu_1/c$ avant la collision avec un électron, celui-ci étant supposé au repos, donc avec une quantité de mouvement nulle. Au titre de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, on s'attend à ce que le photon, s'il est bien une particule, poursuive son chemin, mais en subissant une déviation d'un angle θ et avec une quantité de mouvement $p_2 = h\nu_2/c$, tandis que l'électron, lui, est mis en mouvement dans une direction faisant un angle φ avec la direction incidente de l'électron, et avec une quantité de mouvement p_e non nulle. Nous traitons cette collision avec les outils de la mécanique classique ; ainsi, supposant la collision élastique, la quantité d'énergie du système formé du photon et de l'électron est conservée avant et après la collision :

$$h\nu_1 + m_e c^2 = h\nu_2 + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}$$

La quantité de mouvement est elle aussi conservée ; il s'agit d'une grandeur vectorielle, si bien que nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_e}$$

On peut appliquer le théorème d'Al-Kashi[21] :

$$\begin{aligned} p_e^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\theta \\ &= \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu_1\nu_2}{c^2}\cos\theta \end{aligned}$$

En remplaçant cette écriture de p_e^2 dans l'équation de conservation de l'énergie, nous avons :

20. Le deuxième article portait sur le mouvement brownien, le troisième jeta les bases de la relativité restreinte, et le quatrième sur l'équivalence entre masse et énergie.
21. Ghiyath ad-Din Jamshid Masùd al-Kashi, v. 1380 – 1429.

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_1}{c} + m_e c &= \frac{h\nu_2}{c} + \sqrt{\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu_1\nu_2}{c^2}\cos\theta + m_e^2c^2} \\ \iff \nu_1 - \nu_2 &= \frac{h\nu_1\nu_2}{m_e c^2}(1-\cos\theta) \\ \iff \lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{2h}{m_e c^2}\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

On note généralement λ_C, appelée longueur d'onde de Compton, la grandeur :

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

La vérification expérimentale de cette prédiction par Compton lui valu le prix Nobel de physique en 1927, établissant définitivement la nature corpusculaire du photon.

iii) La dualité onde-particule La mise en évidence du caractère dual de la nature du rayonnement, alors qu'on ne l'envisageait que sous la forme d'onde [22] amena Louis de Broglie [23] à postuler en 1924 la même dualité pour des corps qu'on croyait à cette époque être des particules. Ainsi il posa l'égalité de l'énergie au repos d'une particule de masse m_0 et d'une énergie quantique de fréquence ν_0 :

$$h\nu_0 = m_0 c^2$$

Il posa aussi l'égalité entre la quantité de mouvement de la particule $p = mv$ avec celle d'une onde $h\nu/c$:

$$\begin{aligned} mv &= \frac{h\nu}{c} \\ \iff mv &= \frac{h}{\lambda} \\ \iff \lambda &= \frac{h}{mv} \end{aligned}$$

Ainsi mise en évidence, la longueur d'onde de de Broglie fournit des prédictions répondant aux conséquences du **caractère ondulatoire du comportement des particules matérielles**. Cette théorie lui valut de recevoir le prix Nobel de physique en 1929, car elle fut confirmée en 1927 par une expérience de diffraction d'électrons par un cristal de nickel. De nos jours, d'autres phénomènes permettent de vérifier les prédictions de de Broglie, comme les les neutrons thermiques issus des réactions de fission nucléaire, qui vérifient aussi ce phénomène, ou le microscope électronique, qui profite du fait que la longueur d'onde de l'électron est très inférieure à celle des photons optiques, et ne pâtit ainsi pas de la diffraction qui est le principal facteur limitant de la microscopie photonique.

b) Le photon Le photon est une particule élémentaire sans masse ni charge électrique, vecteur de l'interaction électromagnétique entre particules (voir figure 5.4 page 70). Elle appartient à la famille des **bosons** [24] et, à ce titre, a un spin de 1. La projection du spin peut donc prendre pour valeurs -1, 0 et $+1$; la valeur 0 étant interdite par la théorie quantique des champs pour les particules de masse nulle [Ollitrault, 2005], on ne conserve que les valeurs -1 et $+1$, qui correspondent à deux états orthogonaux de polarisation de l'onde électromagnétique qui permettent de décrire toute polarisation quelconque. L'interdiction de la valeur 0 est à mettre en lien avec l'orthogonalité de la direction de propagation de l'onde, donc du photon, avec la direction de vibration du champ électrique.

22. Il est à noter qu'Isaac Newton (1643 – 1727) postulait déjà en 1704 la nature corpusculaire de la lumière. Huygens fut le premier à le contester en affirmant le principe ondulatoire de la lumière, qui permettait d'expliquer la réfraction. Finalement, c'est Fresnel puis Young qui, par leurs expériences, permirent au modèle ondulatoire de s'imposer, avant qu'Einstein ne réintroduise l'hypothèse corpusculaire pour expliquer l'effet photoélectrique.

23. Louis Victor de Broglie, prince, puis duc de Broglie, 1892 – 1987.

24. De Satyendranath Bose, 1894 – 1974.

5.2.4.2 Mécanismes d'émission

a) Émission spontanée Les états d'énergie des atomes et molécules étant quantifiés, donc discrets, on parle d'émission spontanée lorsqu'un atome passe d'un état excité d'énergie E_e à un état final d'énergie inférieure E_f ; **cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon** dont l'énergie $h\nu$ vaut l'écart entre les deux énergies : c'est-à-dire que la fréquences d'émission des atomes et molécules sont quantifiées, donc discrets. On a [Jahier, 2010] :

$$h\nu \quad = \quad E_e - E_f$$

b) Émission stimulée On parle d'émission stimulée lorsqu'un photon d'énergie $h\nu$ provoque l'émission d'un autre photon par un atome en le faisant passer d'un état d'énergie excité E_e à un état d'énergie inférieure E_f [Jahier, 2010] :

$$h\nu + (E_e - E_f) \quad = \quad 2h\nu$$

Ce phénomène d'amplification de l'émission est notamment utilisé dans les lasers, acronyme de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.*

5.2.4.3 Absorption

Le phénomène quantique d'absorption est « l'inverse » de l'émission spontanée : un atome dans un état E_1 passe dans un état $E_2 > E_1$ lorsqu'il absorbe un photon d'énergie [Jahier, 2010] :

$$h\nu \quad = \quad E_2 - E_1$$

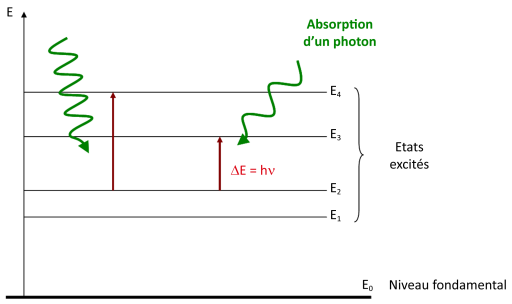


Figure 5.6 – Absorption d'un photon. Source : http://e-cours.univ-paris1.fr/modules/uved/envcal/html/rayonnement/3-rayonnement-atmosphere/3-1-absorption-transmission-atmospherique.html.

Il est à noter que les niveaux énergétiques des molécules sont liés à des types de transitions différents, associés à diverses bandes spectrales, et qu'ils peuvent correspondre à une déformation de la molécule :

- une vibration, un étirement symétrique ou asymétrique, dans le domaine infrarouge, correspondant à la structure fine des molécules ; ce sont ces transitions qui sont impliquées dans les molécules polyatomiques responsables de l'effet de serre atmosphérique, consistant dans l'absorption du rayonnement thermique infrarouge émis par la Terre consécutivement au chauffage dont elle fait l'objet de la part du Soleil dans le visible [25] ;
- une rotation, dans les domaine des hyperfréquences, correspondant à la structure hyperfine des molécules.

25. Les molécules majoritaires, O_2 et N_2 sont diatomiques et, de surcroît, la liaison entre les deux atomes de la molécule est double ou triple, rendant peu probable une variation de la distance interatomique. Dans le cas des molécules polyatomiques, linéaires (CO_2, N_2O) ou non (CH_4, H_2O), la géométrie des molécules autorise des vibrations, c'est-à-dire des variations des angles entre liaisons.

Dans les domaines visible et ultra-violet se trouvent les régimes de transition électronique et de dissociation.

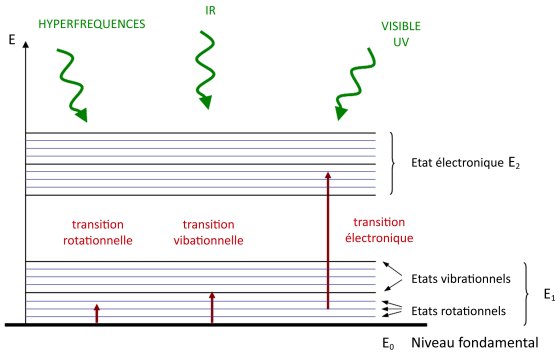


Figure 5.7 – Transitions électronique, vibrationnelle et rotationnelle d'une molécule. Source : http://e-cours.univ-paris1.fr/modules/uved/envcal/html/rayonnement/3-rayonnement-atmosphere/3-1-absorption-transmission-atmospherique.html.

5.3 Autres exemples de mécanismes d'émission

5.3.1 Mécanismes thermiques

Outre le corps noir qui régit l'émission de corps ayant une température liée aux phénomènes physique qui leur sont propres, on peut trouver dans l'Univers d'autres **mécanismes thermiques** d'émission [Collin-Zahn, 2010] :

- l'émission des poussières : chauffées par le rayonnement stellaire environnant, les poussières acquièrent une température, entre 10 et 100 K, qui les amène à rayonner selon la loi de Planck ;
- le rayonnement d'un milieu dilué : les particules des gaz astrophysiques peuvent interagir entre elles, et émettre du rayonnement sous la forme d'un spectre continu. Dans les nébuleuses ionisées, la température peut atteindre $10^4 K$ et le maximum d'émission se situer dans le visible. Dans les gaz chauds ou dans la couronne solaire, la température atteint 10^6 à $10^7 K$ et l'émission se fait dans les rayons X. Le gaz intergalactique des amas de galaxies et les sources galactiques peuvent enfin atteindre les $10^8 K$ et émettre dans les rayons X durs. Au spectre continu de l'émission thermique de ces gaz se superposent les raies d'absorption des atomes et molécules présents dans le milieu ;
- le rayonnement de fond cosmologique : il s'agit de la première lumière de l'histoire de l'Univers, émise lorsque celui-ci n'avait que 300 000 ans, à l'occasion de la recombinaison des électrons avec les noyaux. À cette époque, la température de l'Univers était de 3000 K mais l'expansion de l'Univers a fait perdre de l'énergie aux photons associés à ce rayonnement, aujourd'hui mesuré à $2,725\ K$.

5.3.2 Mécanismes non-thermiques

L'émission de lumière peut aussi être provoquée par des **phénomènes non-thermiques** [Collin-Zahn, 2010] :

- le rayonnement synchrotron, dû au freinage d'électrons relativistes par un champ magnétique ; la gamme de longueur d'onde du rayonnement va du radio aux rayons X, selon l'énergie de l'électron, mais avec un spectre étroit ;
- le rayonnement cyclotron, dû à la déviation d'électrons moins énergétiques dans un champ magnétique fort ; le rayonnement émis va du visible aux rayons X ;
- le rayonnement continu de freinage (*bremsstrahlung*), dû à la déviation de particules chargées, sous l'effet du champ électrique généré par d'autres particules chargées ; le spectre émis par ce mécanisme est large ;
- l'effet Tcherenkov[26], qui apparaît lorsqu'une particule chargée a dans un diélectrique une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu. Il peut être observé dans l'atmosphère terrestre

26. Découvert par les physiciens soviétiques Pavel Alekseïevitch Tcherenkov (1904 – 1990), prix Nobel de physique 1958 pour cette découverte, et Sergueï Ivanovitch Vavilov (1891 – 1951).

lorsque des particules cosmiques la percutent.

Exercices recommandés

11.5 page 187, 11.6.7 page 190, 11.6.9 page 192, 11.6.10 page 193.

Chapitre 6

Électromagnétisme des milieux

Le comportement des ondes électromagnétiques dans les milieux tient essentiellement à la description de l'interaction des champs dont elles sont la manifestation avec celui des électrons. Ceux-ci peuvent être libres, auquel cas on a affaire aux milieux conducteurs voire aux plasmas, ou liés à un atome, et dans ce cas il s'agit des diélectriques[1].

6.1 Description des milieux

6.1.1 Description qualitative

6.1.1.1 Conducteur et plasmas

a) Conducteur placé dans un champ statique Si le conducteur est placé dans un champ électrique statique, les électrons de conductions sont mis en mouvement et, après une phase transitoire, atteignent un état d'équilibre où ils sont immobiles ; certains, atteignant le bord du conducteur, s'y sont accumulés. L'immobilité des conducteurs à l'équilibre traduit le fait que **le champ électrique à l'intérieur du conducteur y est nul** : le champ induit par le déplacement des électrons compense exactement le champ extérieur qui lui est imposé ; c'est donc, au sens littéral, une situation d'équilibre. Bien évidemment, si le champ change avant la fin de la période transitoire, la situation d'équilibre n'est pas atteinte, et le champ intérieur n'est pas nul.

Il y a aussi une discontinuité du champ électrique entre l'extérieur et l'intérieur du conducteur, due aux charges de surface (voir partie 2.3 page 17). Néanmoins, en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss, si le champ électrique est nul dans le conducteur, cela signifie aussi que **la densité de charge est nulle dans le conducteur** [Courty, 2008]. Si le champ extérieur varie, la mise à l'équilibre prend un certain temps, du fait de l'inertie des électrons et des collisions dont ils font l'objet avec les atomes.

b) Métal et plasma La différence entre métal et plasma tient en ce que, **dans un métal, les atomes mettent en commun des électrons en guise de liaison** : c'est la « mer d'électron », source de propriétés des métaux comme leur conductivité ou leur éclat. **Dans un plasma, il n'y a pas de liaison entre les atomes** et les électrons libres ne le sont qu'en raison d'un processus d'ionisation : ce n'est donc pas la structure même du milieu qui détermine sa nature. Ainsi, tous les éléments de la classification périodique peuvent former un plasma, alors que seuls certains peuvent être considérés comme des métaux (voir figure 6.1 page suivante) ; à l'inverse, les métaux sont un cas particulier de plasma à haute densité électronique. Parmi les métaux, la conductivité[2] s'étend de $0,002\ MS \cdot m^{-1}$ pour le germanium à $62\ MS \cdot m^{-1}$ pour l'argent ; l'aluminium ($38\ MS \cdot m^{-1}$), l'or ($45\ MS \cdot m^{-1}$) et le cuivre ($59\ MS \cdot m^{-1}$) sont les meilleurs métaux conducteurs après l'argent. On peut établir une typologie des plasmas selon la température et la densité électronique (voir figure 6.2 page 80).

1. Ou isolants.
2. L'unité de la conductivité est le siemens par mètre. Le siemens s'exprime dans les unités du système international ainsi : $1\ S = 1m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$.

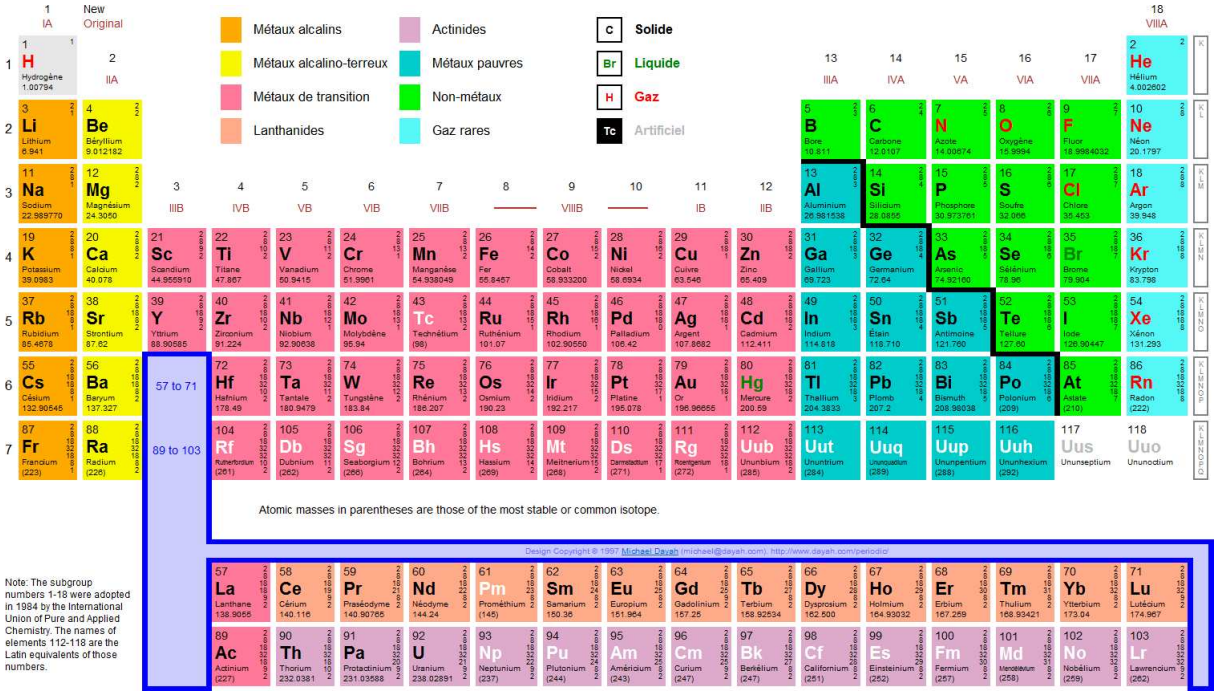


Figure 6.1 – La classification périodique des éléments. Source : `http://www.ptable.com`.

6.1.1.2 Diélectriques

Un diélectrique est composé de **particules neutres, auxquelles restent liés les électrons** : il n'y a pas d'ions ni de charges libres dedans, et les courants électriques sont aussi des courants liés, dus au mouvement des électrons autour des noyaux atomiques ; électriquement, un diélectrique est un isolant. En revanche, sous l'effet d'un champ électrique, les particules peuvent se polariser, c'est-à-dire que les nuages électroniques autour des noyaux vont se déformer de telle façon que le barycentre des charges négatives n'est plus confondu avec le barycentre des charges positives : un moment dipolaire induit apparaît donc ainsi. Ces milieux sont isolants, en ce sens qu'aucun courant électrique ne peut *a priori* s'y propager[3]. Ce sont les plastiques, les verres, les gaz neutres, etc.

Il existe plusieurs mécanismes de polarisation [Robichon, 2011] :

— la polarisation électronique, décrite au début de cette partie, liée à une déformation du nuage électronique d'un atome ou d'une molécule ;
— la polarisation atomique ou ionique, concernant le déplacement d'atomes ou d'ions par rapport à leur position d'équilibre dans un édifice donné ;
— la polarisation d'orientation, qui provient de l'orientation du moment dipolaire permanent d'un atome ou d'une molécule (par exemple l'eau) sous l'effet d'un champ électrique ;
— la polarisation par déplacement macroscopique, qui survient à l'échelle d'un matériau sous l'effet d'un champ électrique stationnaire ou que l'on trouve dans une jonction p-n (dans les transistors).

Dans notre cas, les molécules vont se polariser sous l'effet du champ électrique de l'onde électromagnétique, et cette polarisation va être à l'origine des phénomènes de réfraction, de transparence et d'absorption.

6.1.2 Grandeurs descriptives

Nous décrivons ici un ensemble de grandeurs générales, qui peuvent s'appliquer aux deux types de milieux, même si l'on verra qu'elles sont particulièrement utiles dans le cas des diélectriques.

3. Sauf dans le cas d'un « claquage » : cas d'un condensateur soumis à une tension trop importante, ou de la foudre lorsqu'il y a un orage.

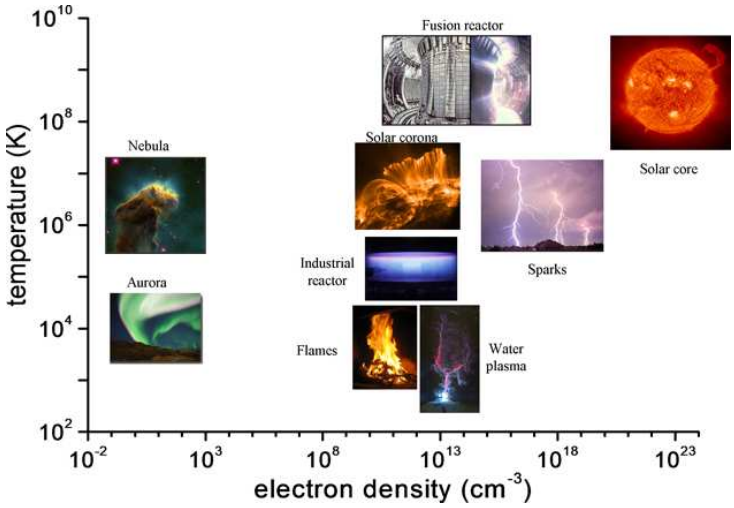


Figure 6.2 – Typologie des plasmas selon la température et la densité électronique. Source : http://www.lpp.fr/Our-research-in-a-few-words.

6.1.2.1 Moment dipolaire

Si une charge q est séparée d'une charge $-q$ par un vecteur $\overrightarrow{d}$, l'ensemble étant neutre, le **moment dipolaire électrique** $\overrightarrow{p}$ est :

$$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{d}$$

Cette grandeur peut être permanente, comme dans le cas de la molécule d'eau, ou induite soit par un champ électrique extérieur ou un autre phénomène externe (collision avec une autre particule polarisable, etc.).

6.1.2.2 Polarisation

Si le moment dipolaire est une grandeur microscopique, le **vecteur polarisation** est, lui, une grandeur mésoscopique qui exprime le moment dipolaire moyen par unité de volume $d\tau$:

$$\overrightarrow{P} = \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}$$

On peut aussi exprimer le vecteur polarisation en fonction du nombre moyen N de molécules présentes dans le milieu, et en faisant intervenir le moment dipolaire moléculaire moyen $\langle \overrightarrow{p}_{mol} \rangle$:

$$\overrightarrow{P} = N\langle \overrightarrow{p}_{mol} \rangle$$

6.1.2.3 Courant de polarisation

La variation temporelle de la polarisation définit le **courant de polarisation** :

$$\overrightarrow{j}_{pol} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$$

Il est à noter que le courant de polarisation est homogène à un courant électrique ; on le distingue toutefois du courant de conduction, car celui-ci provient du déplacement des électrons libres, alors que le courant de polarisation ne fait qu'état du déplacement d'électrons liés.

Ainsi, de façon générale, on peut écrire que la densité de courant est la somme de la densité de courants de conduction et de celle de courants liés :

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}_{cond} + \overrightarrow{pol}$$

6.1.2.4 Charges de polarisation

La divergence de la polarisation définit la densité de charges liées, ou **charges de polarisation** :

$$\rho_{pol} \quad = \quad - \text{ div } \overrightarrow{P}$$

Là encore, il convient de rappeler que les charges de polarisation sont des charges locales apparaissant en raison du déplacement d'électrons liés, et de la distinction qui s'opère entre le barycentre local de charges positives et le barycentre local de charges négatives.

Ainsi la densité de charge totale est la somme de la densité de charges libres et de la densité de charges de polarisation :

$$\rho \quad = \quad \rho_{libres} + \rho_{pol}$$

6.1.2.5 Susceptibilité électrique : milieux linéaires

On dit que le milieu est linéaire si la polarisation et le champ électrique $\overrightarrow{E}$ sont liés par une relation locale du type :

$$\overrightarrow{P} \quad = \quad \epsilon_0 \, [\chi] \, \overrightarrow{E}$$

où ϵ_0 est la **permittivité diélectrique du vide**, et $[\chi]$ le tenseur de **susceptibilité électrique** locale ; chaque composante χ_{ij} peut dépendre de la fréquence, du temps et être complexe. Le milieu est homogène si le tenseur de susceptibilité ne dépend pas du lieu, et qu'il prend la même valeur en tout point du milieu. Le milieu est isotrope si le tenseur $[\chi]$ est diagonal et contient des éléments tous égaux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans le milieu ; autrement dit, la relation peut être réécrite avec un simple scalaire en lieu et place du tenseur de susceptibilité électrique, ce scalaire s'appelant susceptibilité électrique. Le champ électrique stimulant la polarisation pouvant être construit à partir d'une base de fonctions sinusoïdales, nous adoptons l'écriture complexe pour toutes ces grandeurs :

$$\underline{\overrightarrow{P}} \quad = \quad \epsilon_0 \, \underline{\chi}(\omega) \underline{\overrightarrow{E}}$$

6.1.2.6 Déplacement électrique

On définit le vecteur **déplacement électrique** (complexe) par :

$$\underline{\overrightarrow{D}} \quad = \quad \epsilon_0 \, \underline{\overrightarrow{E}} + \underline{\overrightarrow{P}}$$

En utilisant le vecteur polarisation, nous avons donc :

$$\underline{\overrightarrow{D}} \quad = \quad \epsilon_0 \left(1 + \underline{\chi}(\omega)\right) \underline{\overrightarrow{E}}$$

6.1.2.7 Permittivité diélectrique relative

On définit alors la **permittivité diélectrique relative** (complexe) par :

$$\underline{\epsilon_r}(\omega) \quad = \quad 1 + \underline{\chi}(\omega)$$

De cette façon, le déplacement électrique est relié au champ électrique par la relation :

$$\underline{\overrightarrow{D}} \quad = \quad \epsilon_0 \, \underline{\epsilon_r} \, \underline{\overrightarrow{E}}$$

6.1.2.8 Polarisabilité

a) Équation de Clausius-Mossotti Nous avons précédemment exprimé le vecteur polarisation comme :

$$\overrightarrow{P} = N\langle \overrightarrow{p}_{mol} \rangle$$

Ce moment est approximativement proportionnel au champ électrique agissant sur la molécule. Pour mettre cette dépendance en évidence, nous définissons la polarisabilité moléculaire γ_{mol} comme le rapport du moment dipolaire moléculaire moyen sur ϵ_0, multiplié par le champ appliqué sur la molécule :

$$\langle \overrightarrow{p}_{mol} \rangle = \epsilon_0 \gamma_{mol} \overrightarrow{E}$$

On peut démontrer que le vecteur polarisation et la susceptibilité s'écrivent respectivement [Jackson, 2001] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P} &= N\gamma_{mol}\left(\epsilon_0 \overrightarrow{E} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P}\right) \\ \chi_e &= \frac{N\gamma_{mol}}{1 - \frac{1}{3}N\gamma_{mol}} \end{aligned}$$

En outre, la polarisabilité moléculaire peut s'écrire :

$$\gamma_{mol} = \frac{3}{N}\left(\frac{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right)$$

qui est l'équation de Clausius [4]-Mossotti [5] ; en particulier, la proportionnalité de $(\epsilon/\epsilon - 1)/(\epsilon/\epsilon + 2)$ avec la densité de matière est très bien vérifiée dans les substances diluées telles que les gaz.

b) Modèle de polarisabilité électrique On peut étudier l'induction de moment dipolaire par un champ extérieur en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron soumis à la force de rappel élastique $-m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ et au champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$:

$$m\omega_0^2 \overrightarrow{r} = e\overrightarrow{E}$$

Le moment dipolaire moléculaire induit est donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p}_{mol} &= e\overrightarrow{r} \\ &= \frac{e^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{E} \end{aligned}$$

Ainsi la polarisabilité est égale à :

$$\gamma_{mol} = \frac{e^2}{m\omega_0^2\epsilon_0}.$$

Mais si chaque molécule a un ensemble de charges e_j, de masses m_j et de fréquences d'oscillation ω_j, la polarisabilité moléculaire s'écrit :

$$\gamma_{mol} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_j \frac{e_j^2}{m_j\omega_j}$$

4. Rudolf Julius Emanuel Clausius, 1822 – 1888.
5. Ottaviano-Fabrizio Mossotti, 1791 – 1863.

6.1.2.9 Remarque sur les grandeurs magnétiques

[Feynman *et al.*, 2004] attire l'attention du lecteur sur la confusion qui règne en matière de description des phénomènes magnétiques. Définissons d'abord le moment magnétique $\overrightarrow{M}$, tel que :

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{M}$$

Ainsi l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{M} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

De la même façon que nous avons écrit $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}/\epsilon_0$, nous pourrions avoir envie d'écrire un nouveau vecteur, noté $\overrightarrow{H}$, tel que :

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} - \mu_0 \overrightarrow{M}$$

Mais il existe une autre façon d'écrire $\overrightarrow{H}$, que nous notons ici $\overrightarrow{H}'$, telle que :

$$\overrightarrow{H}' = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$$

Ce faisant, $\overrightarrow{H}'$ et $\overrightarrow{B}$ n'ont plus les mêmes unités. Pire : les unités de $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parfois appelées, dans les systèmes hors-SI, avec des noms différents, alors qu'elles sont identiques, respectivement en *œrsted* et en *gauss*.

6.1.3 Dynamique des électrons

L'objectif de cette partie va être de donner un modèle d'interaction entre l'électron et le noyau permettant d'expliquer la réponse du milieu à la stimulation du champ électrique de l'onde qui le traverse et, ce faisant, de donner une expression de la permittivité diélectrique.

Le modèle de l'électron élastiquement lié est linéaire, c'est-à-dire qu'une onde de pulsation ω impose des oscillations aux électrons à une pulsation ω. L'amplitude de la réponse, comme nous allons le voir, dépend bien sûr de la valeur de la pulsation.

6.1.3.1 Mise en équation

On suppose donc que les forces agissant sur l'électron sont [Robichon, 2011] :

- une force de rappel : $\overrightarrow{f_r} = -m\ \omega_0^2\ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})$, le facteur $m\ \omega_0$ jouant donc le rôle de la constante de raideur d'un ressort ; on impose toutefois que la position d'équilibre de l'électron est l'origine $(\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{0})$;
- une force de frottement fluide, décrivant les phénomènes dissipatifs (collisions, rayonnements, etc.) : $\overrightarrow{f_f} = -m\Gamma\overrightarrow{v}$;
- la force électrique de Lorentz subie par l'électron du fait du champ électrique de l'onde : $\overrightarrow{f_e} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$.

L'utilisation de la relation fondamentale de la dynamique donne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} + \Gamma\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} + \omega_0^2\overrightarrow{r} = -\frac{e}{m}\underline{\overrightarrow{E}}$$

6.1.3.2 Moment dipolaire

Si on écrit le champ électrique sous la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{-i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$, alors on peut écrire le moment dipolaire en faisant intervenir l'équation du mouvement ci-dessus [Jackson, 2001] :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= -e\overrightarrow{r} \\ &= \frac{e^2}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega\right)^{-1}\overrightarrow{E}\end{aligned}$$

6.1.3.3 Permittivité diélectrique

On suppose que le milieu contient N molécules par unité de volume, Z électrons par molécule, et qu'au lieu d'une fréquence de liaison unique pour tous les électrons, il y ait f_j électrons par molécule associés à la fréquence de liaison ω_j et au coefficient d'attenuation Γ_j. La constante diélectrique s'écrit alors [Jackson, 2001] :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_r(\omega)}{\epsilon_0} &= 1 + \chi_e \\ &= 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_o m} \sum_j f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j\omega\right)^{-1} \\ \text{avec :} \qquad \sum_j f_j &= Z \end{aligned}$$

Ainsi, si les grandeurs f_j, Γ_j et ω_j sont déterminées expérimentalement ou formulées par la théorie quantique, on peut avoir une représentation exhaustive de la contribution atomique à la permittivité diélectrique.

6.2 Ondes électromagnétiques dans les milieux

6.2.1 Équations de Maxwell

6.2.1.1 Caractérisation du milieu

a) Densité de charge Afin d'inclure tous les types de densités de charge, nous avons déjà écrit que :

$$\rho = \rho_{pol} + \rho_{libres}$$

Quel que soit le milieu étudié, il est globalement neutre ; on a donc toujours :

$$\rho = 0$$

b) Densité de courant Afin d'inclure tous les types de densités de courant, nous avons déjà écrit que :

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}_{pol} + \overrightarrow{j}_{cond}$$

En revanche, dans le cas particulier des conducteurs, la loi d'Ohm formule la proportionnalité de la densité de courant avec le champ électrique :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

avec σ la conductivité du milieu.

6.2.1.2 Écriture des équations de Maxwell

Les deux équations faisant intervenir les propriétés des milieux sont l'équation de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère ; les deux autres, Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday, sont inchangées.

a) Équation de Maxwell-Gauss De façon littérale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{div } \overrightarrow{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho_{pol} + \rho_{libres}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

On peut réécrire cette équation :

$$\begin{aligned} \text{div } \left(\epsilon_0 \overrightarrow{E}\right) &= \rho_{libres} - \text{div } \overrightarrow{P} \\ \iff \text{div } \overrightarrow{D} &= \rho_{libres} \end{aligned}$$

i) Diélectrique Toutefois, dans un diélectrique, la densité de charges libres est nulle par définition, donc :

$$\begin{aligned} \text{div } \overrightarrow{D} &= 0 \\ \text{ou :} \quad \text{div } \overrightarrow{E} &= 0 \end{aligned}$$

ii) Conducteurs Dans un conducteur, la densité volumique de charges est nulle, donc :

$$\text{div } \overrightarrow{E} = 0$$

b) Équation de Maxwell-Ampère De façon littérale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\overrightarrow{j}_{pol} + \overrightarrow{j}_{cond} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

On peut réécrire cette équation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= \mu_0 \left(\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} + \overrightarrow{j}_{cond} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\overrightarrow{j}_{cond} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

i) Diélectriques Toutefois, dans un diélectrique, la densité de courant de conduction est nulle par définition, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \underline{\epsilon_r}(\omega) \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ii) Conducteurs Dans un conducteur, où la loi d'Ohm s'applique, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E} + \mu_0 \epsilon_0 \underline{\epsilon_r}(\omega) \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

6.2.2 Fréquences propres de la permittivité

Ainsi, le comportement des champs dépend pour partie de celui de la permittivité diélectrique $\epsilon_r(\omega)$.

6.2.2.1 Dispersion, absorption

Les coefficients d'atténuation Γ_j sont généralement faibles devant les fréquences de liaison ω_j ; cela signifie que la permittivité diélectrique est réelle pour la plupart des fréquences (il y a donc transparence). Le facteur $(\omega_j^2 - \omega^2)^{-1}$ est positif pour $\omega < \omega_j$ et négatif sinon ; ainsi, aux basses fréquences, en dessous de la plus petite des valeurs de ω_j, tous les termes de la somme $\sum_j$ donnent une contribution positive, et $\epsilon(\omega) > 1$. Mais plus ω augmente et dépasse les ω_j successifs, la somme $\sum_j$ acquiert des termes négatifs, jusqu'à devenir elle-même négative, et alors $\epsilon(\omega) < 1$. Au voisinage de chaque ω_j, la partie réelle du dénominateur de la somme s'annule ; la fraction est purement imaginaire et atteint un maximum [Jackson, 2001].

On parle de dispersion normale lorsque la partie réelle de ϵ augmente avec ω, et de dispersion anormale quand ϵ décroît avec ω. On constate que l'on est quasiment toujours en dispersion normale, sauf à proximité d'une fréquence de résonance, auquel cas la partie imaginaire prend des valeurs significatives. Les valeurs positives de la partie imaginaire de ϵ correspondent à une dissipation de l'onde électromagnétique dans le milieu : ce sont les régions d'absorption [Jackson, 2001].

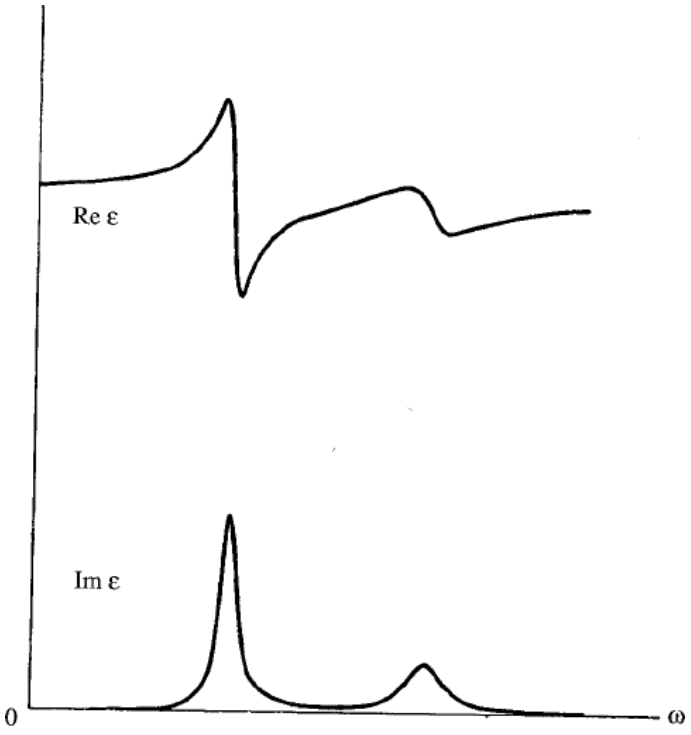


Figure 6.3 – Parties réelle et imaginaire de la constant diélectrique $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ au voisinage de deux résonances. La région de dispersion anormale est aussi l'intervalle de fréquence dans lequel se produit l'absorption. Source : [Jackson, 2001].

6.2.2.2 Basses fréquences : conductivité électrique

Aux basses fréquences, la pulsation ω se rapproche de 0. La réaction du milieu dépend de la valeur de la plus basse fréquence de résonance.

a) Diélectriques Pour les diélectriques, la plus basse fréquence de résonance est différente de 0 : $\omega_0 \neq 0$. On peut décrire le milieu avec $\omega = 0$; dans ce cas, la polarisabilité moléculaire est décrite par le modèle vu en 6.1.2.8 page 82 [Jackson, 2001].

b) Conducteurs métalliques

i) Modèle de Drude Si f_0 électrons par molécule sont des électrons libres, alors $\omega_0 = 0$. La permittivité diélectrique rencontre une singularité en $\omega = 0$, et s'écrit [Jackson, 2001] :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{lié}(\omega) + i\frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\Gamma_0 - i\omega)}$$

où $\epsilon_{lié}(\omega)$ est la contribution de tous les autres dipôles.

On peut étudier cette singularité en écrivant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

et en considérant que le milieu répond à la loi d'Ohm :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

où σ est la conductivité du milieu, que l'on suppose posséder une permittivité diélectrique $\epsilon_{lié}$. En écriture complexe, on a, pour l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = -i\omega \left(\epsilon_{lié} + i\frac{\sigma}{\epsilon}\right) \overrightarrow{E}$$

Toutefois, si on n'insère pas explicitement la loi d'Ohm dans l'équation de Maxwell-Ampère, mais on regroupe les propriétés du milieu dans la permittivité diélectrique, alors on aurait identifié la quantité entre parenthèses de l'équation ci-dessus à la permittivité $\epsilon(\omega)$, qui nous aurait fourni une expression de la conductivité :

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m(\Gamma_0 - i\omega)}$$

ii) Interprétation $f_0 N$ est le nombre d'électrons libres par unité de volume du milieu. Le coefficient d'atténuation Γ_0/f_0 se détermine expérimentalement à partir de la conductivité. Pour le cuivre, la densité d'atomes est $N \approx 8 \cdot 10^{28} m^{-3}$, et à la température normale, $\sigma \approx 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, donc $\Gamma_0/f_0 \approx 4 \cdot 10^{13} s^{-1}$. Si on suppose que $f_0 = 1$, on voit que jusqu'aux fréquences de l'ordre de $10^{11} s^{-1}$, les conductivités métalliques sont réelles et indépendantes de la fréquence : le courant est en phase avec le champ. Aux fréquences plus élevées (à partir de l'infrarouge), la conductivité est complexe, et varie avec la fréquence comme décrit ci-avant.

Ainsi, la distinction entre diélectriques et conducteurs est artificielle, du moins loin de $\omega = 0$. Si un milieu possède des électrons libres, il est conducteur aux basses fréquences ; sinon, il est isolant. Aux fréquences non-nulles, la contribution de la conductivité σ à la permittivité ϵ apparaît simplement comme une amplitude de résonance. De fait, on peut donc attribuer les propriétés dispersives du milieu à une constante diélectrique complexe autant qu'à une conductivité dépendant de la fréquence et à une constante diélectrique [Jackson, 2001].

6.2.2.3 Hautes fréquences : fréquence de plasma

On s'intéresse désormais aux fréquences très supérieures à la plus élevée des fréquences de résonance. La permittivité diélectrique prend la forme [Jackson, 2001] :

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\text{avec :} \quad \omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}$$

La pulsation ω_p, dont la seule variable est NZ, nombre total d'électrons par unité de volume, est la fréquence de plasma du milieu. Le nombre d'onde s'écrit alors :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

qui forme la relation de dispersion.

Dans un diélectrique, l'expression que nous venons de donner pour la permittivité s'applique uniquement si $\omega^2 \gg \omega_p^2$; la constante diélectrique est alors légèrement inférieure à 1, et croît avec la fréquence. Le nombre d'onde est réel, et varie avec la fréquence de la même façon qu'un mode de guide d'ondes de fréquence de coupure ω_p.

En revanche, dans les plasmas dilués, tels que l'ionosphère, les électrons sont libres et l'atténuation négligeable. L'expression de la permittivité est vaut pour une grande étendue spectrale, y compris pour $\omega < \omega_p$. Dans cette situation, le nombre d'onde est purement imaginaire, et les ondes qui y arrivent sont réfléchies ; le champ intérieur décroît exponentiellement avec la distance à la surface : c'est l'effet de peau.

L'expulsion des champs de l'intérieur d'un plasma est un effet bien connu lors des processus thermonucléaires et exploitée dans le confinement des plasmas. La réflectivité des métaux à partir des fréquences optiques correspond à un comportement fondamentalement identique à celui des plasmas dilués. Aux hautes fréquences ($\omega \gg \Gamma_0$), la permittivité diélectrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_{lié}(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\epsilon_0 \\ \text{avec :} \qquad \omega_p &= \sqrt{\frac{ne^2}{m^*\epsilon_0}} \end{aligned}$$

où ω_p est la fréquence de plasma des électrons de conduction, et m^* une masse effective incluant partiellement les effets de liaison. Pour $\omega \ll \omega_p$, le comportement de la lumière incidente sur un métal est très semblable à celui du rayonnement incident sur un plasma. La lumière visible pénètre ainsi à peine dans le métal (on a encore un effet de peau), et est presque entièrement réfléchie ; mais lorsque la fréquence s'accroît et passe dans le domaine $\epsilon(\omega) > 0$n elle se trouve subitement transmise, et sa réflectivité change radicalement : certains métaux sont ainsi très transparents dans l'ultra-violet [Jackson, 2001], et la plupart le sont dans les rayons X [Feynman *et al.*, 2004].

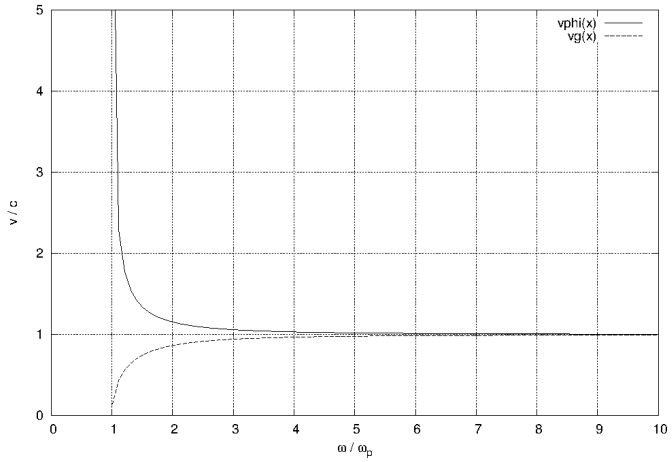


Figure 6.4 – Vitesses de phase et de groupe de l'onde électromagnétique dans un plasma.

6.2.3 Propagation

L'étude de la propagation suppose l'établissement des équations d'onde, ce qui se fait facilement à partir des équations de Maxwell en rotationnel, dont il faut exprimer à nouveau le rotationnel. Le cas général est le suivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{E} - \frac{\underline{\underline{\epsilon_r}}(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \underline{\epsilon_r}(\omega)\sigma\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{B} - \frac{\underline{\underline{\epsilon_r}}(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} &= \mu_0 \underline{\epsilon_r}(\omega)\sigma\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

6.2.3.1 Diélectriques

Dans un diélectrique, la conductivité est nulle par définition, si bien que l'on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{E} - \frac{\underline{\underline{\epsilon_r}}(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} &= 0\\ \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{B} - \frac{\underline{\underline{\epsilon_r}}(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

On retrouve les équations obtenues dans le vide, à ceci près que ϵ_0 est remplacé par $\epsilon_0\underline{\epsilon_r}(\omega)$. La relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k^2} = \underline{\epsilon_r}(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}$$

Les conditions de propagation, de dispersion et d'absorption ont déjà été décrites. Notons simplement que le cas de la propagation suppose que k soit réel ; dans ce cas, la vitesse de l'onde s'écrit :

$$\begin{aligned}v &= \frac{\omega}{k}\\ &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\end{aligned}$$

6.2.3.2 Conducteurs

Dans un conducteur, on aboutit à l'équation d'onde suivante :

$$\Box\overrightarrow{E} = \mu_0\underline{\epsilon_r}(\omega)\sigma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Après passage en complexes, on arrive à l'équation de dispersion :

$$k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 + i\omega\mu_0\underline{\epsilon_r}(\omega)\sigma$$

6.2.4 Réfraction

6.2.4.1 Description du phénomène

La réfraction est le phénomène de déviation des ondes électromagnétiques lors de leur propagation dans un milieu inhomogène. Son explication physique tient en ce que le champ électrique porté par l'onde polarise les molécules du milieu et créé des moments dipolaires oscillants. L'accélération des charges oscillantes créé un nouveau champ de rayonnement. Ce nouveau champ, en interférant avec le champ primitif, créé un champ modifié qui est équivalent à un changement de phase de l'onde primaire. Ce changement de phase est proportionnel à l'épaisseur de milieu traversé ; l'effet est ainsi le même que si on avait, dans le matériau, une vitesse de phase différente [Feynman *et al.*, 2004].

Le vecteur polarisation est la traduction de ce phénomène ; si N est le nombre d'atomes par unité de volume, il est proportionnel au champ électrique :

$$\overrightarrow{P} = N\epsilon_0\epsilon_r(\omega)\overrightarrow{E}$$

On voit ainsi que le facteur déterminant la réponse du milieu à la stimulation électrique extérieure est la permittivité diélectrique $\epsilon_r(\omega)$ et qu'elle dépend de la fréquence [Feynman *et al.*, 2004].

6.2.4.2 Indice de réfraction

Supposant la propagation, cela signifie qu'il y a transparence et que la partie réelle de la permittivité est non nulle. On appelle indice de réfraction la racine carrée de la partie réelle de la permittivité :

$$n = \sqrt{Re(\epsilon_r)}$$

La vitesse de l'onde y vaut :

$$v = \frac{c}{n}$$

6.2.4.3 Principe de Fermat

a) Chemin optique On appelle chemin optique entre A et B la quantité [Chevy & Cohadon, 2016] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AB} &= \int_{t_A}^{t_B} v\ dt \\ &= \int_A^B n\ ds\end{aligned}$$

b) Principe de moindre temps **Parmi tous les chemins optiques possibles, celui qui minimise le temps de parcours entre A et B est effectivement celui emprunté par la lumière**. Ceci implique que le trajet emprunté par la lumière est tel que la quantité $\mathcal{L}_{AB}$ est minimale.

6.2.4.4 Équation de l'eikonale

Dans un diélectrique où les seules charges en présence sont de polarisation, nous pouvons réécrire la polarisation, la densité de charges de polarisation et la densité de courant de polarisation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} &= \epsilon_0 \chi \overrightarrow{E} \\ \Rightarrow \rho_{pol} &\equiv -\text{div } \overrightarrow{P} \\ &= -\epsilon_0 \chi \text{div } \overrightarrow{E} \\ \Rightarrow \overrightarrow{j_{pol}} &\equiv \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} \\ &= \epsilon_0 \chi \frac{d\overrightarrow{E}}{dt}\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\text{div } (1+\chi)\overrightarrow{E} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} &= \mu_0 \epsilon (1+\chi) \frac{d\overrightarrow{E}}{dt}\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday demeurent inchangées. Si on cherche les solutions de ces équations sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\omega t - \phi(\overrightarrow{r}))}$$

Nous nous intéressons ici en particulier à la fonction $\phi(\overrightarrow{r})$, qui a pris la forme $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}$ jusqu'à présent, et étudions en particulier ses propriétés topologiques. À un instant t donné, la surface d'onde, définie par un état de phase et une amplitude partagés, impose d'être définie pour le lieu des points définis par une valeur de $\phi(\overrightarrow{r})$; par définition des propriétés de l'opérateur gradient, cette fonction scalaire est

orthogonale en tout point à la fonction vectorielle $\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{k}$.

Les équations de Maxwell se réécrivent [Chevy & Cohadon, 2016] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \cdot \overrightarrow{E_0} &= 0 \\
\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \cdot \overrightarrow{B_0} &= 0 \\
\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \wedge \overrightarrow{E_0} &= \omega \overrightarrow{B_0} \\
\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \wedge \overrightarrow{B_0} &= -\frac{\omega}{c^2}(1+\chi)\overrightarrow{E_0}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ étant le vecteur d'onde local de l'onde, ces équations confirment le caractère transversal de l'onde. À partir de $\overrightarrow{B_0}$ de l'équation de Maxwell-Faraday, remis dans celle de Maxwell-Ampère, et utilisant le double produit vectoriel, on peut éliminer $\overrightarrow{E_0}$ et obtenir :

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1+\chi)$$

qui s'apparente à une relation de dispersion. Ainsi la vitesse de phase de l'onde s'écrit ici :

$$\begin{aligned}
v_\phi &= \frac{\omega}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi\|} \\
&= \frac{c}{\sqrt{1+\chi}}
\end{aligned}$$

L'indice de réfraction, lui, s'écrit :

$$n(\overrightarrow{r}) = \sqrt{1+\chi}$$

Ce qui nous permet d'écrire aussi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi(\overrightarrow{r}) = n(\overrightarrow{r})\frac{\omega}{c}\overrightarrow{u}$$

avec $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$, tel que :

$$\overrightarrow{u} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds}$$

Comme le vecteur de Poynting est porté par le vecteur d'onde, les rayons lumineux lui sont localement tangents et forment les lignes de champ de la fonction vectorielle $\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.

On considère donc un rayon lumineux suivant le trajet $\overrightarrow{r}(s)$ en fonction de l'abscisse curviligne s. Si nous dérivons la dernière relation par rapport à l'abscisse curviligne s, alors en utilisant (membre de gauche) la dérivée d'une fonction composée [6] [Chevy & Cohadon, 2016] :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi(\overrightarrow{r}(s)) &= \frac{\omega}{c}\frac{d}{ds}\left(n(\overrightarrow{r}(s))\overrightarrow{u}\right) \\
\Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi &= \frac{\omega}{c}\frac{d(n\overrightarrow{u})}{ds} \\
\iff \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)n\overrightarrow{u} &= \frac{d(n\overrightarrow{u})}{ds}
\end{aligned}$$

Or le terme de droite peut s'écrire :

6. On rappelle que $(f\circ g)' = (g'\circ f)\times f'$, avec $g = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ et $f = \overrightarrow{r}(s)$.

$$\frac{d(n\overrightarrow{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}\, n$$

Nous pouvons donc aboutir à **l'équation de l'eikonale**[7] ou équation des rayons :

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, n$$

Le membre de gauche s'explicite ainsi :
— le facteur entre parenthèses $n\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}$ est orienté selon la tangente locale à la trajectoire du rayon lumineux ;
— sa dérivée donne donc l'orientation selon la normale à celle-ci, dirigée vers le centre de courbure : nous avons donc là deux des vecteurs du repère de Frenet[8].

On en conclut en conséquence que **le rayon lumineux va sembler tourner autour, pour ne pas dire contourner, le gradient d'indice**. On trouve ici l'explication du principe de Fermat. Il est évident que $\mathcal{L}$ est minimal en passant par des régions d'indice pas trop élevé ($\mathcal{L}$ alors dominé par n) ; néanmoins, trop s'éloigner des régions d'indice élevé ferait à nouveau augmenter le chemin optique ($\mathcal{L}$ alors dominé par $\int ds$). Il existe donc bel et bien, qualitativement, une trajectoire minimisant cette quantité : c'est effectivement celle emprunté par le rayon lumineux.

6.2.4.5 Lois générales de la réflexion et réfraction

Nous nous intéressons à la situation d'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu 1, vers un milieu 2, les deux étant séparés par une interface, appelée dioptre, localement plan, paramétré de telle façon que l'axe x est normal au plan du dioptre, celui-ci étant confondu avec le plan (y, z). Ce sont les relations de continuité des équations de Maxwell qui vont nous donner les conditions de passage entre les deux milieux. Ces relations sont la base de l'optique géométrique.

On fait ici l'hypothèse d'une onde écrite en $+j\omega t$.

a) Lois de Snell-Descartes On suppose l'existence de deux ondes dans le milieu 1 :
— une onde incidente i, de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i} = (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})$, de pulsation ω_i, dont le champ électrique est d'amplitude $\overrightarrow{\underline{E_{i0}}}$, qui s'exprime donc :

$$\overrightarrow{\underline{E_i}} = \overrightarrow{\underline{E_{i0}}} e^{j\left(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{r}\right)}$$

— une onde réfléchie r, de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_r} = (k_{rx}, k_{ry}, k_{rz})$, de pulsation ω_r, dont le champ électrique est d'amplitude $\overrightarrow{\underline{E_{r0}}}$, qui s'exprime donc :

$$\overrightarrow{\underline{E_r}} = \overrightarrow{\underline{E_{r0}}} e^{j\left(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r}\right)}$$

On suppose l'existence dans le milieu 2 d'une onde transmise t, de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_t} = (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$, de pulsation ω_t, dont le champ électrique est d'amplitude $\overrightarrow{\underline{E_{t0}}}$, qui s'exprime donc :

$$\overrightarrow{\underline{E_t}} = \overrightarrow{\underline{E_{t0}}} e^{j\left(\omega_t t - \overrightarrow{k_t}\cdot\overrightarrow{r}\right)}$$

Or nous savons que les composantes tangentielles du champ électrique sont continues de part et d'autre du dioptre, c'est-à-dire :

$$\left(\overrightarrow{\underline{E_i}} + \overrightarrow{\underline{E_r}}\right)\cdot\overrightarrow{t} = \overrightarrow{\underline{E_t}}\cdot\overrightarrow{t}$$

où $\overrightarrow{t}$ est un vecteur unitaire tangentiel au dioptre, donc $\overrightarrow{t} = (0, t_y, t_z)$ avec $\sqrt{t_y^2 + t_z^2} = 1$.

Compte-tenu des écritures des champs données ci-dessus, la condition de passage entre les deux milieux est vraie à tout instant et en tout lieu si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

7. Du mot grec $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$, image, qui a aussi donné le mot « icône ».
8. Jean Frédéric Frenet, 1816 – 1900.

— les amplitudes tangentielles sont conservées de part et d'autre du dioptre :

$$\left(\underline{\overrightarrow{E_{i0}}} + \underline{\overrightarrow{E_{r0}}}\right) \cdot \overrightarrow{t} \quad = \quad \underline{\overrightarrow{E_{t0}}} \cdot \overrightarrow{t}$$

— les pulsations des trois ondes sont égales :

$$\omega_i \;=\; \omega_r \;=\; \omega_t$$

— les produits scalaires des vecteurs d'onde avec le vecteur position sur le dioptre $\overrightarrow{r} = (0, r_y, r_z)$ sont égaux, c'est-à-dire que les trois vecteurs d'onde ont en commun leur vecteur projeté sur le plan (y, z), noté $\overrightarrow{k_{yz}}$:

$$\overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{r} \quad = \quad \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{r} \;=\; \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{r}$$

Cette relation a deux conséquences majeures :

— les vecteurs $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ sont dans le même plan, en l'occurrence $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{k_{yz}})$; il s'agit de la **première-loi de Snell[9]-Descartes[10] [11] : les rayons lumineux incidents, réfléchis et transmis sont dans le même plan** ;

— la norme de chaque vecteur d'onde $\overrightarrow{k_v}$ projeté sur le plan (y, z) s'écrit $k_v \sin\theta_v$, et nous pouvons écrire l'égalité de ces trois projections :

$$k_i \sin\theta_i \;=\; k_r \sin\theta_r \;=\; k_t \sin\theta_t$$

Comme on peut écrire les vecteurs d'onde en fonction des indices de réfraction ainsi

$$k_v \quad = \quad n_v \frac{\omega}{c}$$

alors la relation d'égalité des projetés des vecteurs d'onde sur le dioptre s'écrit :

$$n_i \sin\theta_i \;=\; n_r \sin\theta_r \;=\; n_t \sin\theta_t$$

Comme les ondes incidente et réfléchie sont dans le même milieu 1, alors les indices n_i et n_r sont égaux (et notés n_1), ce qui nous permet d'écrire les deux relations suivantes dérivées de la précédente (en notant n_2 l'indice du milieu 2 et θ_2 l'angle de l'onde transmise dans le milieu 2) :

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_r \\ &= \theta_1 \\ n_1 \sin\theta_1 &= n_t \sin\theta_t \\ &= n_2 \sin\theta_2 \end{aligned}$$

Ces relations constituent respectivement les **deuxième et troisième lois de Snell-Descartes** :

— **l'angle du rayon réfléchi avec la normale et égal à l'angle du rayon incident avec celle-ci** ;

— **le produit de l'indice de réfraction et du sinus de l'angle de chaque rayon avec la normale est conservé à la traversée d'un dioptre**.

Le phénomène de déviation d'une onde électromagnétique (*i.e.* d'un rayon lumineux) au passage d'un dioptre est appelé réfraction. Ce phénomène peut aussi être envisagé comme la conséquence du principe de Fermat selon lequel la lumière va d'un point à un autre en prenant le chemin le plus court au regard des vitesses de celle-ci dans les milieux qu'elle traverse. On fera observer que l'on peut retrouver les lois de Descartes avec l'équation de l'eikonale.

On peut voir qualitativement qu'un milieu 2 plus réfringent que le milieu 1 (c'est-à-dire que $n_2 > n_1$) va avoir tendance à rapprocher le rayon réfracté de la normale (voir figure 6.5 page suivante).

9. Willebrord van Roijen Snell, 1580 – 1626.
10. René Descartes, 1596 – 1650.
11. L'histoire des sciences se montre bien ingrate envers Ibn Sahl (Abu Sa'd al-'Ala', 940 – 1000), qui découvrit les lois de la réfraction en 984, à Bagdad, soit près de six siècles avant leur découverte en Europe.

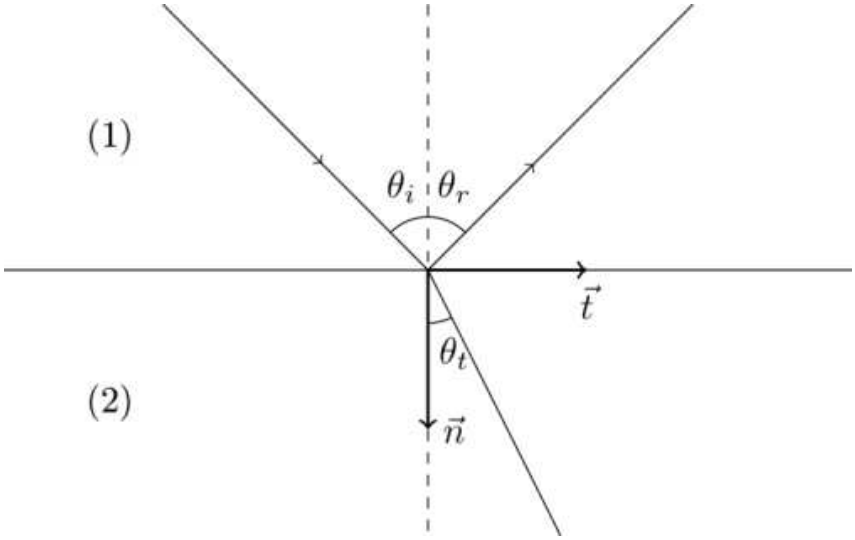


Figure 6.5 – La réfraction ; cas particulier où $n_2 > n_1$. Source : [Bosser, 2013].

b) Coefficients de réflexion et de transmission des amplitudes Nous définissons ainsi les coefficients de réflexion et de transmission des amplitudes complexes [Courty, 2008] :

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \frac{\underline{\underline{E_{r0}}}}{\underline{E_{i0}}} \\ \tau &\equiv \frac{\underline{\underline{E_{t0}}}}{\underline{E_{i0}}} \end{aligned}$$

c) Coefficients de réflexion et de transmission des éclairements Nous pouvons par ailleurs écrire les éclairements [12] incidents, réfléchis et transmis :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\propto \langle P \rangle_t = \frac{nE^2}{2\mu_0 c} \\ \Rightarrow \mathcal{E}_i &= \frac{n_1 E_{i0}^2}{2\mu_0 c} \\ \mathcal{E}_r &= \frac{n_1 E_{r0}^2}{2\mu_0 c} \\ \mathcal{E}_t &= \frac{n_2 E_{t0}^2}{2\mu_0 c} \end{aligned}$$

Ces grandeurs sont naturellement réelles, et pas complexes comme les amplitudes. Nous définissons ainsi **les coefficients de réflexion et de transmission des éclairements** $\mathcal{E}_v$, ceux-ci étant, comme nous l'avons vu, proportionnels au carré de l'amplitude du champ électrique (voir aussi page ??) :

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \\ &= \rho^2 \\ T &\equiv \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \\ &= \frac{n_2}{n_1}\tau^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la conservation de l'énergie s'exprime naturellement par [13] :

12. Voir page 50.
13. Le dioptre n'étant pas considéré comme absorbant.

$$R + T = 1$$

6.2.4.6 Angles limites de réfraction et d'incidence

Dans le cas où $n_1 < n_2$, la fonction sinus étant croissante sur $[0; \pi/2]$, alors l'angle de réfraction θ_r est inférieur à l'angle d'incidence θ_i : $\theta_r < \theta_i$. Par conséquent l'angle incident maximal est $\pi/2$, et dans ce cas l'angle réfracté limite vaut [Courty, 2008] :

$$\theta_{r,\ell} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$$

Dans le cas où $n_1 > n_2$, alors l'angle de réfraction θ_r est supérieur à l'angle d'incidence θ_i : $\theta_r > \theta_i$. Par conséquent l'angle réfracté maximal est $\pi/2$, de sorte que l'angle incident correspondant vaut :

$$\theta_{i,\ell} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Si l'angle d'incidence θ_i est supérieur à cet angle, alors on a une **réflexion totale**.

Exercices recommandés

11.4 page 184, 11.3 page 181, 11.7.1 page 198, 11.8.2.3 page 208.

Chapitre 7

Diffusion et transfert radiatif

7.1 La diffusion

L'excitation d'un électron, lié ou non, par le champ électrique de l'onde incidente provoque l'apparition d'un moment dipolaire variable, qui génère à son tour une onde électromagnétique ; ce phénomène est appelé diffusion. Elle peut être envisagée dans trois domaines :

— le cas où les particules diffusantes sont très petites devant la longueur d'onde du rayonnement incident : c'est le cas de la **diffusion de Rayleigh** ;
— le cas où les particules diffusantes ont une taille de l'ordre de la longueur d'onde du rayonnement incident : c'est le cas de la **diffusion de Mie** ;
— le cas où les particules diffusantes sont très grandes devant la longueur d'onde du rayonnement incident : on se retrouve alors dans le cas de l'**optique géométrique**.

La diffusion est donc un phénomène conjuguant absorption de l'onde, source de la mise en mouvement de l'électron, et ré-émission immédiate d'une autre onde, provoquée par le mouvement induit de l'électron. Elle se distingue de la réfraction dans la mesure où celle-ci décrit l'interaction de l'onde et des particules par le jeu de la polarisation de celles-ci, mais sans absorption et ré-émission immédiate. De la sorte, si la réfraction induit une trajectoire courbe et localement rectiligne, la diffusion, elle, requiert l'étude de la distribution angulaire de la ré-émission, qui dépend du rapport entre la taille de la particule et la longueur d'onde de l'onde incidente.

7.1.1 Le rayonnement dipolaire électrique : la diffusion de Rayleigh

L'objectif de cette partie est de mettre en lien les sources $(\rho, \overrightarrow{j})$ et l'onde $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ à partir de la description classique offerte par les équations de Maxwell. Le **rayonnement dipolaire** électrique permet d'expliquer la diffusion dite de Rayleigh, qui intervient lorsqu'une onde électromagnétique stimule un atome ou une molécule dont la taille est très inférieure à la longueur d'onde. On utilisera ici des résultats vus dans la partie sur les potentiels retardés (voir page page 32). Il est à noter que, si nous l'examinons ici dans le cadre de la diffusion, la physique de cette partie est semblable à celle requise pour décrire l'antenne de Hertz.

7.1.1.1 Dipôle variable

Le modèle du dipôle variable a historiquement été établi en premier par le physicien Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894).

a) Description du dipôle Soit un dipôle de charge nulle, doté d'un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ généré par deux charges $+q$, en P, et $-q$, en N, séparées d'une distance ℓ, telle que $\overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{NP}$, le long de l'axe $\overrightarrow{u_z}$, de part et d'autre du plan (x, y), l'origine O étant au milieu de deux charges. On suppose que le moment dipolaire $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{\ell}$ varie, soit du fait de la variation de q, soit de celle de ℓ. On va examiner l'influence de la variation du moment dipolaire de la source en un point M dont la position est donnée par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) mesurées depuis l'origine O ; on note $r_+ = |PM|$ et $r_- = |NM|$.

La variation du moment dipolaire s'écrit [Mouchet, 2011] :

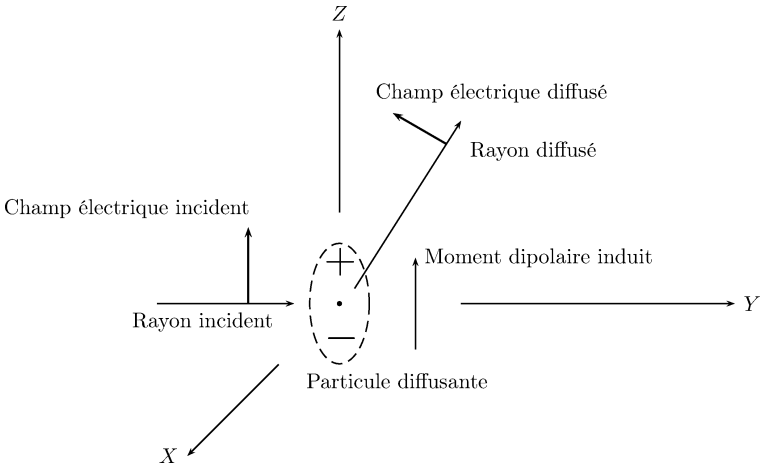


Figure 7.1 – Le phénomène de diffusion : un champ électrique incident polarise une particule. Le moment dipolaire induit, variable, produit l'émission d'un champ électrique, dans une direction différente de celle d'incidence.

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} &= \frac{dq}{dt}\overrightarrow{\ell} \\ &= \int i\overrightarrow{d\ell} \\ &= i\,\overrightarrow{\ell}\end{aligned}$$

b) Potentiel vecteur Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire pour le dipôle, on considère que la distance au dipôle est très supérieure à la longueur d'onde, celle-ci étant aussi très supérieure à la taille du dipôle. On a [Mouchet, 2011] :

$$r \gg \quad \lambda = \tfrac{c}{\nu} \quad \gg \ell$$

Ceci amène à la solution suivante pour le potentiel vecteur :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i(t-r/c)}{r}\overrightarrow{d\ell} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\overrightarrow{\dot{p}}(t-r/c)\end{aligned}$$

La symétrie de la source pour toute rotation autour de l'axe z implique, en vertu du principe de Curie[1], l'indépendance de la conséquence, le potentiel vecteur, vis-à-vis de la variable φ qui paramètre la rotation autour de cet axe. Ne restent donc en lice que les paramètres de distance r et de colatitude θ, avec lesquels on écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u_z} &= \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \Rightarrow \overrightarrow{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{p}(t-r/c)\left(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right)\end{aligned}$$

c) Champ magnétique Connaissant $\overrightarrow{A}$, on peut en déduire $\overrightarrow{B}$ en vertu de la relation $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$, à condition d'écrire le rotationnel en coordonnées sphériques et d'utiliser les propriétés de symétrie du dipôle.

Comme $\overrightarrow{A}$ est selon $\overrightarrow{\ell}$, sa seule composante non-nulle est selon $\overrightarrow{u_z}$, si bien que [Perez *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= 0\end{aligned}$$

1. Pierre Curie, 1859 – 1906.

En faisant intervenir des coordonnées sphériques pour exprimer les mêmes quantités :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{y}{r} \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial r}\frac{x}{r} \end{aligned}$$

Or, par un jeu d'inversion de lecture du produit vectoriel, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -y/r \\ x/r \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi}$$

En calculant la dérivée du membre de droite, on trouve immédiatement [Mouchet, 2011] :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)\sin\theta}{cr} + \frac{\dot{p}(t-r/c)\sin\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

Le deuxième terme du membre de droite n'est que l'expression de la loi de Biot-et-Savart, c'est-à-dire de la situation en régime statique, où l'intensité du courant est constante.

d) Potentiel scalaire Toujours en connaissant $\overrightarrow{A}$, on peut calculer le potentiel scalaire V en utilisant la jauge de Lorentz (voir page 28) [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned} \text{div}\ \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \iff \frac{\partial V}{\partial t} &= -c^2\text{div}\ \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

Il nous faut écrire la divergence en coordonnées sphériques, toujours en tenant compte de l'absence de dépendance de $\overrightarrow{A}$ avec la longitude φ :

$$\begin{aligned} \text{div}\ \overrightarrow{A} &= \frac{2}{r}A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \\ \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{c^2\mu_0}{4\pi}\left(\frac{2}{r^2}\dot{p}(t-r/c)\cos\theta - \frac{1}{r^2}\dot{p}(t-r/c)\cos\theta - \frac{1}{rc}\ddot{p}(t-r/c)\cos\theta\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{r^2}\dot{p}(t-r/c)\cos\theta - \frac{1}{r^2}\dot{p}(t-r/c)\cos\theta\right) \\ &= \frac{c^2\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc}\cos\theta + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2}\cos\theta\right) \\ \Rightarrow V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\dot{p}(t-r/c)}{rc} + \frac{p(t-r/c)}{r^2}\right)\cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{p}(t-r/c)\cdot\overrightarrow{r}}{r^3} + \frac{\dot{\overrightarrow{p}}(t-r/c)\cdot\overrightarrow{r}}{r^2c}\right) \end{aligned}$$

avec $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$.

Le premier terme du membre de droite n'est autre que le potentiel généré par un dipôle statique.

e) Champ électrique On peut enfin en déduire le champ électrique, par sa relation de dérivation en fonction des deux potentiels [Mouchet, 2011] :

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

en écrivant le gradient en coordonnées sphériques et en tenant encore compte de l'absence d'influence du paramètre φ. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\, V &= \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ &= \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\dot{p}(t-r/c)}{rc} - \frac{2p(t-r/c)}{r^3} - \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc^2} - \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2c}\right)\overrightarrow{u_r} \\ &\quad -\frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{\dot{p}(t-r/c)}{rc} + \frac{p(t-r/c)}{r^2}\right)\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\ddot{p}(t-r/c)\cos\theta - \ddot{p}(t-r/c)\sin\theta\right)$$

D'où finalement :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\left(2\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2c} + 2\frac{p(t-r/c)}{r^3}\right)\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2c} + \frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

On constate immédiatement que, $\overrightarrow{B}$ étant défini selon $\overrightarrow{u_\varphi}$ et $\overrightarrow{E}$ selon $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, les deux champs sont bel et bien orthogonaux.

7.1.1.2 Solution en champ proche

a) Cas général en notation réelle On considère qu'on est en champ proche lorsque le temps de propagation est négligeable :

$$t - \frac{r}{c} \approx t$$

On peut faire le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} & p(t-r/c) \approx p(t) - \frac{r}{c}\dot{p}(t) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}\ddot{p}(t) \\ \text{d'où :}\quad & \dot{p}(t-r/c) \approx \dot{p}(t) - \frac{r}{c}\ddot{p}(t) \\ \text{puis :}\quad & \ddot{p}(t-r/c) \approx \ddot{p}(t)\end{aligned}$$

On finit par obtenir [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\dot{p}(t) - \frac{r}{c}\ddot{p}(t)\right)(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) \\ \overrightarrow{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}(t)}{r^2}\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi} \quad \text{Biot-et-Savart} \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}(t)\cdot\overrightarrow{r}(t)}{r^3} + f\left(\ddot{p}(t)\right) \quad \text{dipôle statique} \\ \overrightarrow{E} &= \frac{2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{p(t)}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{\ddot{p}(t)}{rc^2}\right)\overrightarrow{u_r} + \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{p(t)}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{\ddot{p}(t)}{rc^2}\right)\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

b) Analyse harmonique Si le dipôle varie de façon périodique, alors une analyse harmonique est possible. En particulier, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \underline{p_0} e^{i\omega(t-r/c)} \\ \underline{\dot{p}} &\approx i\omega \underline{p} \\ \text{et :} \quad \underline{\ddot{p}} &\approx -\omega^2 \underline{p} \end{aligned}$$

Deux termes importants de nos développements prennent alors les formes suivantes [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned} \frac{r}{c}\underline{\dot{p}} &= i\omega \frac{r}{c}\underline{p} \\ &\approx 2\pi i \frac{r}{\lambda}\underline{p} \\ \text{et :} \quad \frac{r^2}{c^2}\underline{\ddot{p}} &= -\omega^2 \frac{r^2}{c^2}\underline{p} \\ &\approx -4\pi^2 \frac{r^2}{\lambda^2}\underline{p} \end{aligned}$$

Ceci montre que si la distance r est négligeable devant la longueur d'onde λ, les termes en $\dot{p}$ et $\ddot{p}$ sont négligeables ; de façon équivalente, cela signifie que **le temps de propagation est négligeable devant la période**.

Puisque, en champ proche, on peut en rester au premier ordre, alors :

$$\begin{aligned} \underline{\overrightarrow{E}} &\propto \underline{p}(t) \\ \underline{\overrightarrow{B}} &\propto \underline{\dot{p}}(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que **les champs électrique et magnétique sont en quadrature**.

7.1.1.3 Solution en champ lointain

a) Cas général en notation réelle

i) Champs Si p varie de façon périodique, alors (en réel) :

$$\begin{aligned} \dot{p} &\approx \omega p \\ \ddot{p} &\approx \omega \dot{p} \end{aligned}$$

En champ lointain, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \lambda \ll r \\ \iff & \frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c} \\ \iff & \frac{p}{r} \ll \frac{\omega p}{c} \\ \iff & \frac{p}{r} \ll \frac{\dot{p}}{c} \end{aligned}$$

En repartant de la même hypothèse de départ, on peut aussi avoir :

$$\begin{aligned} & \lambda \ll r \\ \iff & c\omega p \ll r\omega^2 p \\ & \frac{\omega p}{r} \ll \frac{\omega^2 p}{c} \\ & \frac{\dot{p}}{r} \ll \frac{\ddot{p}}{c} \end{aligned}$$

Dès lors, les champs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}$ s'écrivent [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc}\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi}\\ \overrightarrow{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r}\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

Ces expressions amènent quelques commentaires :
— on a : $B = E/c$: **les champs électrique et magnétique vibrent en phase** (contrairement au champ proche où ils sont en quadrature), et la vitesse de la lumière est le seul facteur de proportionnalité entre les deux ;
— les directions des champs électrique et magnétique sont telles que $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k})$ forment un trièdre direct ;
— l'onde formée est localement de type sphérique, avec une décroissance de l'amplitude en $1/r$ selon la chaque direction θ, donc de longue portée ;
— la direction du champ $\overrightarrow{E}$ est uniquement selon $\overrightarrow{u_\theta}$: l'onde est donc polarisée rectilignement, selon la direction intersection du plan de propagation et de la direction localement orthogonale au cône décrit par l'angle θ.

ii) Vecteur de Poynting D'un point de vue énergétique, le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} &= \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\frac{\ddot{p}^2(t-r/c)}{r^2}\sin^2\theta\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

Cette expression appelle, elle aussi, plusieurs remarques :
— l'énergie se propage de façon radiale ;
— l'énergie décroît en $1/r^2$, pour une direction θ donnée ;
— **l'énergie rayonnée a une symétrie cylindrique**, est nulle dans l'axe du dipôle et maximale dans le plan qui lui est orthogonal, en vertu de la dépendance en $\sin^2\theta$ du vecteur de Poynting.

b) Analyse harmonique

i) Vecteurs Si le dipôle oscille de façon périodique, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{p}}(t-r/c) &= \overrightarrow{p_0}e^{i\omega(t-r/c)}\\ \Rightarrow \underline{\dot{\overrightarrow{p}}}(t-r/c) &= i\omega\overrightarrow{p_0}e^{i\omega(t-r/c)}\\ \Rightarrow \underline{\ddot{\overrightarrow{p}}}(t-r/c) &= -\omega^2\overrightarrow{p_0}e^{i\omega(t-r/c)}\end{aligned}$$

ii) Vecteur de Poynting D'où les expressions suivantes pour les champs et le vecteur de Poynting [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{B}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_0\omega^2}{rc}e^{i\omega(t-r/c)}\overrightarrow{u_\varphi}\\ \underline{\overrightarrow{E}} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_0\omega^2}{r}e^{i\omega(t-r/c)}\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{P} &= \frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{p_0^2}{c\,r^2}\omega^4\sin^2\theta\cos^2(\omega(t-r/c))\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

On peut calculer la puissance moyenne temporelle rayonnée par unité de surface en prenant la moyenne temporelle du vecteur de Poynting [Mouchet, 2011] :

$$\left\langle\overrightarrow{P}\right\rangle_t = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{p_0^2}{c\,r^2}\omega^4\sin^2\theta\overrightarrow{u_r}$$

Et, enfin, nous en déduisons la puissance totale rayonnée par intégration sur la sphère de rayon r par calcul du flux du vecteur de Poynting à travers la surface de cette sphère [Mouchet, 2011] :

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c}\omega^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta}_{=4/3} \\ &= \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c}\omega^4 \\ &= \frac{4\pi^3 c p_0^2}{3\epsilon_0}\frac{1}{\lambda^4} \end{aligned}$$

Cette relation est riche d'enseignements :
— la puissance totale rayonnée ne dépend pas de la distance r, en confirmation du **principe de conservation de l'énergie** ;
— la puissance totale rayonnée a une dépendance très forte, à la puissance quatrième, avec l'inverse de la longueur d'onde ; ceci signifie que **les courtes longueurs d'onde sont très diffusées**.

c) Fonction de phase Par définition, on appelle fonction de phase de Rayleigh $P_R(\Theta)$ la fonction donnant la distribution angulaire de puissance moyenne du rayonnement diffusé, en fonction de l'angle Θ entre le rayon incident et la direction de diffusion. Par définition, cette fonction est normalisée par unité d'angle solide :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} P_R(\Theta) d\Omega &= 1 \\ \iff \frac{1}{4\pi}\int_{\Theta=0}^{\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\Theta)\sin(\Theta) d\Theta d\varphi &= 1 \\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} P_R(\Theta)\sin\Theta d\Theta &= 1 \end{aligned}$$

À partir de l'expression du vecteur de Poynting moyen et de cette définition, nous allons chercher à exprimer la fonction $P_R(\Theta)$.

Dans notre présentation précédente, nous avons utilisé l'angle θ (minuscule), en tant que colatitude, et angle entre la direction du champ électrique incident (donc orthogonal à celle du rayon incident). Nous pouvons modifier notre paramétrage pour exprimer la fonction de phase de Rayleigh : soit α, mesuré dans le plan (x, z) entre la direction $\overrightarrow{u_z}$ et la projection sur ce plan de la direction de diffusion.

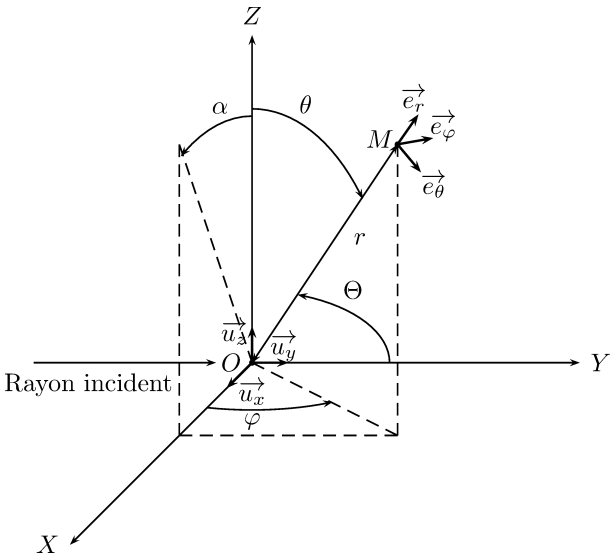


Figure 7.2 – Paramétrage de la fonction de phase de la diffusion.

On a :

$$\cos\theta = \sin\Theta\cos\alpha$$

Or nous avons vu que le vecteur de Poynting moyen dépend de $\sin^2\theta$, donc :

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta \\ &= 1-\sin^2\Theta\cos^2\alpha\end{aligned}$$

Toutefois, la problématique de la fonction de phase est à symétrie cylindrique, si bien qu'il nous revient de moyenner la contribution de l'angle α sur une circonférence :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \left\langle\sin^2\theta\right\rangle_\alpha &= 1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\end{aligned}$$

Et, enfin, nous pouvons calculer normaliser la fonction de phase P en l'écrivant :

$$\begin{aligned}P_R &= KP'_R \\ \text{avec :}\quad P'_R &= 1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\end{aligned}$$

P'_R étant donc la fonction de phase de Rayleigh non normalisée. Le facteur de normalisation K est obtenu en réécrivant la condition de normalisation :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}P_R(\Theta)d\Omega &\equiv 1 \\ \iff \frac{1}{2}\int_0^{\pi}P_R(\Theta)\sin\Theta d\Theta &= 1 \\ \Rightarrow 1 &= \frac{K}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right)\sin\Theta d\Theta \\ &= \frac{K}{2}\left[-\cos\Theta-\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos^2\Theta}{3}-\cos\Theta\right)\cos\Theta\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{3}K \\ \iff K &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Rightarrow P_R(\Theta) &= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(2-\sin^2\Theta\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(1+\cos^2\Theta+\sin^2\Theta-\sin^2\Theta\right) \\ \iff P_R(\Theta) &= \frac{3}{4}\left(1+\cos^2\Theta\right)\end{aligned}$$

7.1.2 Diffusion de Mie

La **diffusion de Mie**[2] intervient lorsqu'une onde électromagnétique rencontre une particule dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde. Il faut néanmoins faire intervenir ici des concepts négligés en diffusion de Rayleigh, que nous retrouverons encore dans la partie sur le transfert radiatif.

2. Gustav Mie, 1869 – 1957.

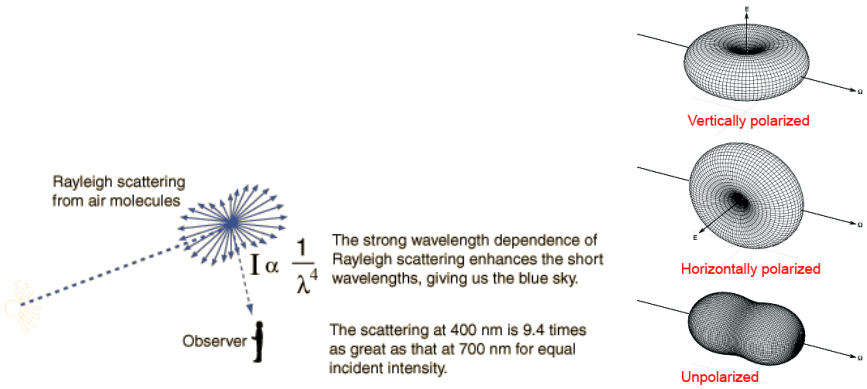


Figure 7.3 – Schéma de la diffusion de Rayleigh et de l'observation, et lobes de diffusion de Rayleigh.

7.1.2.1 Sections efficaces, coefficients

Nous introduisons d'abord quelques concepts utiles pour la description de la diffusion selon Mie.

a) Présentation Les particules diffusantes étant plus grosses qu'une simple molécule, il convient d'introduire la notion de **section efficace**, qui est la surface de la particule « vue » par le corps, ou l'onde, qui vient à sa rencontre. *A priori*, la géométrie la plus simple étant sphérique, on peut formuler que la **section efficace géométrique** vaut la surface du disque diamétral de la sphère :

$$\sigma_g = \pi r^2$$

Néanmoins, si on souhaite traiter de la diffusion, on doit introduire un **coefficient d'efficacité** de la diffusion, noté Q_s [3], et définir une **section efficace de diffusion** [Déau, 2007] :

$$\sigma_s = Q_s \pi r^2$$

Enfin, il convient aussi de considérer que la particule en question n'est pas que diffusante, mais aussi absorbante, et à laquelle est donc associée un coefficient d'absorption Q_a, et une **section efficace d'absorption** :

$$\sigma_a = Q_a \pi r^2$$

Un rayon incident perd de l'énergie par la diffusion et l'absorption ; on peut donc définir un **coefficient dit d'extinction** Q_e tel que :

$$Q_e = Q_a + Q_s$$

dont la section efficace associée est :

$$\sigma_e = Q_e \pi r^2$$

La particule diffusante peut être considérée comme dotée d'un indice de réfraction complexe, que nous notons :

$$m = n_r - i n_i$$

3. L'indice $_s$ vient de l'anglais *scattering* qui signifie « diffusion ».

b) Description des coefficients On peut montrer que le coefficient d'extinction peut s'exprimer [Déau, 2007] :

$$Q_e(\lambda) = \frac{8\pi r}{\lambda} \operatorname{Im}\left(\frac{m^2(\lambda)-1}{m^2(\lambda)+2}\right)$$

Le coefficient d'absorption moléculaire dépend de la concentration N_i du composant i et de sa section efficace σ_i. On a ainsi [Bosser, 2013] :

$$Q_a = \sum_i N_i \sigma_i^a$$

Dans le cas de Rayleigh, le coefficient de diffusion prend cette forme [Bosser, 2013] :

$$Q_s = 8\pi^3 \frac{6+3\eta}{6-7\eta} \frac{\left(n^2-1\right)^2}{3\lambda^4 N}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu, N sa densité moléculaire, et η son coefficient de dépolarisation (dans le cas de l'air : $\eta = 0,0279$).

Il est à noter que les coefficients définis ici sont compris entre 0 et 1, et qu'ils peuvent donc être vus comme la probabilité, pour un photon, de subir le phénomène associé à ce coefficient (absorption ou diffusion).

c) Épaisseur optique On appelle **épaisseur optique** élémentaire à la longueur d'onde λ la quantité :

$$d\tau_e(\lambda) = Q_e(\lambda) dz$$

où dz est l'épaisseur élémentaire de milieu traversé. Une épaisseur optique importante signifie que le rayonnement traversant le milieu est peu transmis, c'est-à-dire fortement absorbé ou diffusé.

7.1.2.2 Particules et rayonnement : la diffusion de Mie

Le formalisme de la diffusion de Mie est plus complexe que celui de la diffusion de Rayleigh, et s'appuie notamment sur l'outil mathématique des harmoniques sphériques. Nous n'en donnons donc que les principaux résultats.

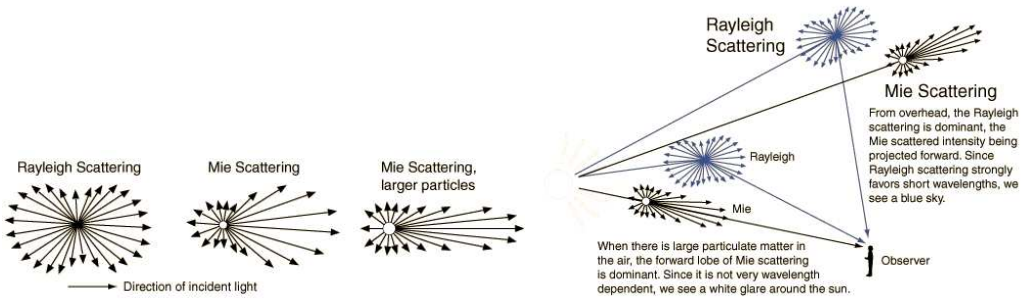


Figure 7.4 – Différences entre diffusions de Mie et de Rayleigh.

a) Paramètre de taille On définit le **paramètre de taille** comme [Déau, 2007] :

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

Le régime dans lequel se situe la diffusion de Mie est celui où $0,1 < x < 100$. Ainsi, à une longueur d'onde donnée, la diffusion de Mie est réalisée par des particules de plus grosses tailles. L'excitation électrique de celles-ci est la cause physique de la diffusion.

b) Champ électrique diffusé Même si nous aurions pu adopter ce formalisme dans le cas de Rayleigh, c'est pour le cas de Mie qu'il s'avère particulièrement utile. On suppose que le champ électrique incident $\overrightarrow{E_0}$ a deux composantes, notées E_0^ℓ et E_0^t ; le champ électrique diffusé a pour composantes E_s^ℓ et E_s^t. On écrit le champ diffusé en fonction du champ incident, supposé se propager selon $\overrightarrow{u_z}$ [4] ainsi [Déau, 2007] :

$$\begin{pmatrix} E_s^\ell \\ E_s^t \end{pmatrix} = \frac{\exp(-ik\rho + ikz)}{ik\rho} \begin{pmatrix} S_\ell & S_3 \\ S_4 & S_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0^\ell \\ E_0^t \end{pmatrix}$$

où ρ est la distance entre le centre de la particule et le point d'observation ; z est l'abscisse de propagation ; k est le nombre d'onde. Enfin, la matrice complexe $\mathbf{S}$ dépend de l'angle de diffusion Θ, de l'angle d'azimut ϕ et des propriétés de la particule. Les propriétés de polarisation sont décrites par les éléments S_3 et S_4 ; les fonctions d'amplitude sont décrites par :

$$\begin{aligned} S_\ell &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \frac{P_n^1(\cos\Theta)}{\sin\Theta} + b_n \frac{dP_n^1(\cos\Theta)}{d\Theta} \right) \\ S_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(b_n \frac{P_n^1(\cos\Theta)}{\sin\Theta} + a_n \frac{dP_n^1(\cos\Theta)}{d\Theta} \right) \end{aligned}$$

où P_n^1 sont des polynômes de Legendre [5], et a_n et b_n des coefficients calculés à chaque ordre n à partir des fonctions de Bessel [6] sphériques. C'est cette description qu'on appelle des harmoniques sphériques, que l'on retrouve en géodésie pour la description du géoïde, ou en mécanique quantique pour décrire les orbitales atomiques.

c) Paramètre d'anisotropie Le **paramètre d'anisotropie** g donne une mesure de l'anisotropie de la fonction de phase. Il caractérise les proportions de rayonnement réfléchi, réfracté et diffracté. Il s'exprime [Déau, 2007] :

$$\begin{aligned} g &\equiv \langle \cos\Theta \rangle \in [-1;+1] \\ &= \frac{4}{x^2 Q_s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(n+2)}{n+1} \mathrm{Re}(a_n \overline{a}_{n+1} + b_n \overline{b}_{n+1}) + \frac{2n+1}{n(n+1)} \mathrm{Re}(a_n \overline{b}_n) \right) \end{aligned}$$

g est compris entre -1 et $+1$. Une valeur négative de g correspond globalement à une rétrodiffusion ; une valeur nulle correspond à une diffusion isotrope ; une valeur positive correspond globalement à une diffusion vers l'avant.

d) Fonction de phase Le paramètre d'anisotropie intervient par exemple dans la fonction de phase de Henyey [7]-Greenstein [8], qui est une fonction analytique répandue pour la description de la diffusion particulaire de Mie [Henyey & Greenstein, 1941] :

$$P_{HG}(\Theta, g) = \frac{1}{4\pi} \frac{1-g^2}{[1+g^2-2g\cos\Theta]^{3/2}}$$

L'expression relativement simple de cette fonction de phase ne doit pas masquer la complexité rapidement atteinte par les fonctions de phase dans le cas de la diffusion de Mie. Ainsi, si $n(r)$ est la fonction de distribution de la taille des particules, la **fonction de phase** s'écrit [Déau, 2007] (voir par exemple la figure 7.5 page suivante) :

4. On avait supposé le voir se propager selon $\overrightarrow{u_x}$ dans le cas de Rayleigh.
5. Adrien-Marie Legendre, 1752 – 1833.
6. Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 – 1846.
7. Louis H. Henyey, 1910 – 1970.
8. Jesse L. Greenstein, 1909 – 2002.

$$P_M(\Theta) = \frac{4\pi}{k^2 k_s}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(S_\ell(\Theta,\varphi,r)) + \mathrm{Re}(S_t(\Theta,\varphi,r)) + \mathrm{Re}(S_3(\Theta,\varphi,r)) + \mathrm{Re}(S_4(\Theta,\varphi,r))\right) n(r)\ dr$$

$$\text{avec :}\quad k_s = \int_{r_1}^{r_2}\pi r^2 Q_s(r) n(r)\ dr$$

$$\text{et :}\quad Q_s = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

En pratique, Q_s est proportionnel à λ^{-1} pour des diffuseurs diélectriques sphériques [Léna, 1986].

On peut ré-exprimer le coefficient d'anistropie à partir d'une fonction de phase P en fonction de l'angle $\beta = \pi - \Theta$:

$$g = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} P(\beta)\cos\beta\sin\beta d\beta$$

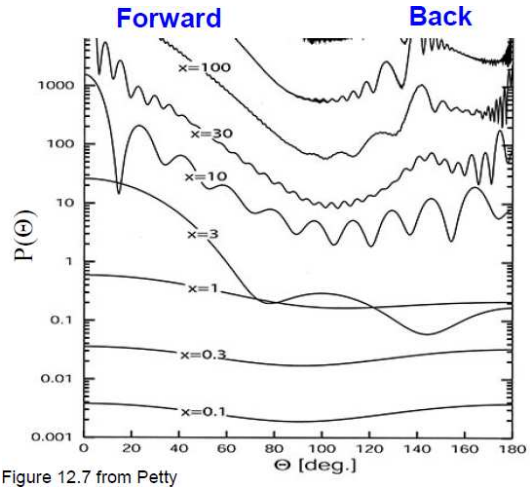


Figure 12.7 from Petty

Figure 7.5 – Fonction de phase en fonction de l'angle de diffusion et du paramètre de taille dans le régime de diffusion de Mie.

e) Quelques exemples On peut voir sur les figures de cette partie que la diffusion de Mie donne lieu à la formation de **lobes** d'autant plus marqués vers l'avant que la particule est grosse devant la longueur d'onde du rayonnement. On retrouve un résultat déjà vu en diffraction avec le paradoxe de Babinet [9], une des preuves de la nature ondulatoire de la lumière.

On peut montrer que le coefficient d'extinction prend la forme donnée sur les figures 7.7 page suivante et 7.8 page 109. Sur la première, en particulier, on représente le coefficient d'extinction pour des gouttelettes d'eau, d'indice de réfraction $n = 1,33$. S'intéressant à la diffusion, on peut considérer que r est fixé, le phénomène en jeu faisant intervenir, en l'occurrence, des gouttelettes d'eau en suspension. Dès lors, les variations de x traduisent les variations inverses de λ : quand x croît, λ décroît. On voit donc que pour $0 < x < 6$, le coefficient d'extinction croît, si bien que les courtes longueurs d'onde sont plus atténuées, donc il y a rougissement ; sur l'intervalle $6 < x < 11$, à l'inverse, le coefficient d'extinction décroît, si bien que ce sont les grandes longueurs d'onde qui sont plus atténuées, et donc il y a bleuissement. En lumière blanche, la taille des particules diffusantes peut donc provoquer une atténuation de certaines franges du spectre.

f) Albédo de diffusion simple Pour un rayonnement venant d'une direction $\overrightarrow{u_i}$ et réfléchi par diffusion dans une direction $\overrightarrow{u}_{dr}$, l'albédo de diffusion simple (voir page 55) s'écrit :

$$\varpi_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{u_{dr}} P\left(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u}_{dr}\right)$$

9. Jacques Babinet, 1794 – 1872.

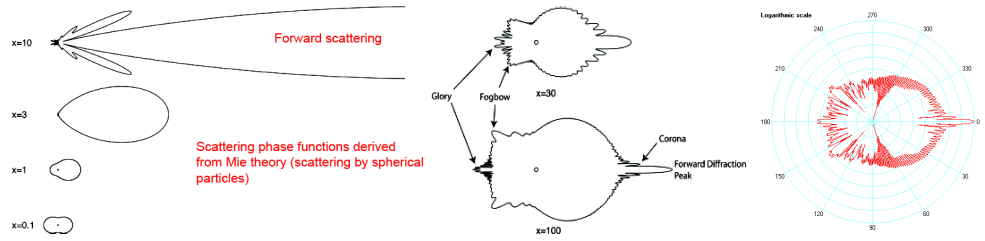


Figure 7.6 – **Quelques exemples de lobes de diffusion de Mie.**

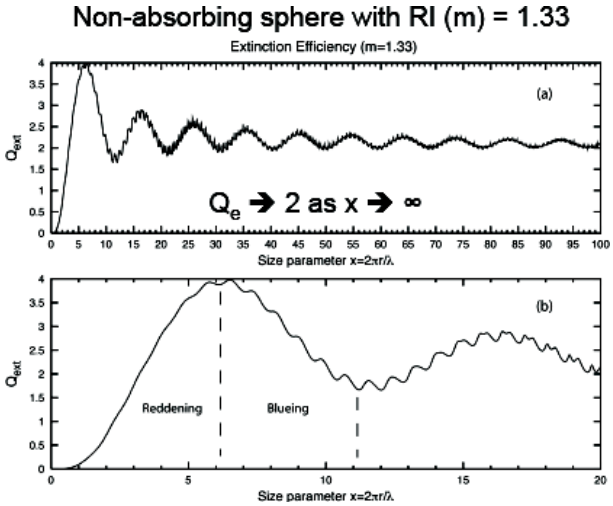


Figure 7.7 – **Coefficient d'extinction en fonction du paramètre de taille dans le cas de l'eau ($n = 1,33$) ; les régimes de rougissement et de bleuissement sont bien visibles.**

avec P la fonction de phase associée au régime de diffusion examiné. Ainsi on voit que l'albédo, caractéristique de la façon dont une particule réfléchit le rayonnement reçu, dépend de la géométrie d'incidence et de réflexion. Plus précisément, avec les grandeurs introduites précédemment, nous avons [Déau, 2007] :

$$\varpi_0 \quad = \quad \frac{1}{2g}\int_{-1}^{+1} P(\cos\Theta)\cos\Theta \; d\Theta$$

où la géométrie intervient à travers le paramètre g et la fonction de phase $P(\Theta)$.

7.1.3 Diffusion selon les lois de l'optique géométrique

Comme énoncé précédemment, lorsque la taille de la particule augmente, le lobe de diffusion vers l'avant s'amincit, à tel point qu'il finit par être confondu avec le rayon incident : on est entré dans le régime de l'**optique géométrique**. La diffusion suit les lois de Descartes : elle n'est plus que réfraction, absorption ou réflexion.

Les particules, désormais très grosses par rapport à la longueur d'onde du rayonnement, se comportent de façon lambertienne et, à ce titre, ont une fonction de phase [Déau, 2007] :

$$P_L(\Theta) \quad = \quad \frac{8}{3\pi}(\sin\Theta - \Theta\cos\Theta)$$

7.2 Transfert radiatif

Lorsqu'un rayonnement se propage dans la matière, sa luminance ne se conserve pas, à l'inverse d'une propagation dans le vide : l'émission propre de la matière lui ajoute de l'énergie, et l'absorption lui en enlève, tandis que la diffusion en modifie les caractéristiques directionnelles. Nous notons dans cette partie [Collin-Zahn, 2010] :

— l'**émissivité monochromatique** ϵ_ν : puissance volumique émise par unité d'angle solide et par unité de longueur d'onde ;

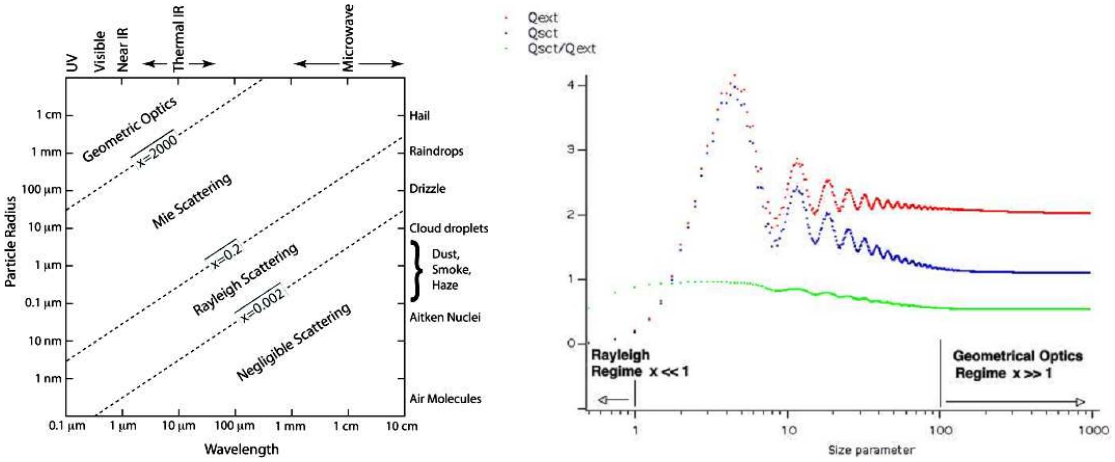


Figure 7.8 – **Les régimes de diffusion et les coefficients d'extinction et de diffusion, selon le paramètre de taille. Sources :** http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf **et [Déau, 2007].**

— le **coefficient d'absorption monochromatique** Q_a : coefficient de puissance absorbée par unité d'angle solide et par unité de longueur d'onde lors de la traversée d'une longueur unité du milieu ; ainsi Q_a a l'unité de l'inverse d'une longueur ;
— le **coefficient de diffusion monochromatique** Q_s : coefficient de puissance diffusée par unité d'angle solide et par unité de longueur d'onde lors de la traversée d'une longueur unité du milieu ; ainsi Q_s a l'unité de l'inverse d'une longueur.

On appelle fonction source le rapport :

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{Q_a}$$

7.2.1 Transfert radiatif dans un milieu non diffusif

Nous considérons ici un milieu où $Q_s = 0$. Ainsi la variation élémentaire de luminance spectrale lors de la traversée d'un milieu d'épaisseur dz s'écrit [Collin-Zahn, 2010] :

$$dL_\nu = (-Q_a L_\nu + \epsilon_\nu)dz$$

Cette équation est l'**équation du transfert radiatif non diffusif**.

On appelle profondeur optique, ou épaisseur optique (sans unité) :

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= \int Q_a dz \\ \iff d\tau_\nu &= -Q_a dz \end{aligned}$$

Ainsi l'équation du transfert radiatif prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dL_\nu}{d\tau_\nu} &= L_\nu - S_\nu \\ \text{avec :} \quad S_\nu &= \frac{\epsilon_\nu}{Q_a} \qquad \text{fonction source} \end{aligned}$$

On suppose avoir affaire à un milieu stratifié, c'est-à-dire un milieu structuré en surfaces planes et où les couches voient les grandeurs physiques être homogènes individuellement (leur variation ne dépend que de la normale à la surface) ; on suppose que le rayonnement se propage selon un direction faisant un angle θ avec la normale à ces couches. Dans ce cas l'équation du transfert radiatif non diffusif s'écrit :

$$\cos\theta \frac{dL_\nu}{d\tau_\nu} = L_\nu - S_\nu$$

dont la solution est :

$$\left[L_\nu \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}\right)\right]_{\tau_{\nu_1}}^{\tau_{\nu_2}} = -\int_{\tau_{\nu_1}}^{\tau_{\nu_2}} S_\nu \exp\left(-\frac{t_\nu}{\cos\theta}\right)\frac{dt_\nu}{\cos\theta}$$

Ce sont donc les conditions aux limites qui déterminent les solutions du problème.

7.2.2 Transfert radiatif dans un milieu diffusif

Si on note J_ν la luminance moyennée sur l'ensemble des directions, alors [Collin-Zahn, 2010] :

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int L_\nu d\Omega$$

Dans le cas d'une diffusion cohérente (la longueur d'onde ne change pas) et isotrope, l'équation du transfert radiatif vue précédemment est modifiée par l'ajout de deux termes : le premier relatif à la **luminance incidente**, qui est perdue car diffusée ($-Q_s L_\nu$), le second relatif à la **luminance diffusée**, qui est gagnée ($+Q_s J_\nu$). Ainsi :

$$\begin{aligned} dL_\nu &= (-Q_a L_\nu + \epsilon_\nu)dz + (-Q_s L_\nu + Q_s J_\nu)dz \\ &= -(I_\nu - S_\nu^{tot})(Q_a + Q_s)dz \end{aligned}$$

avec : $S_\nu^{tot} = \dfrac{S_\nu^{abs} Q_a + Q_s J_\nu}{Q_s + Q_a}$ la fonction source totale

et : $S_\nu^{abs} = \dfrac{\epsilon_\nu}{Q_a}$

On a aussi une **épaisseur optique d'absorption et de diffusion** :

$$\begin{aligned} \tau_\nu^{tot} &= -\int (Q_a + Q_s)dz \\ \iff d\tau_\nu^{tot} &= -(Q_a + Q_s)dz \end{aligned}$$

La somme $Q_a + Q_s$, qui porte l'absorption et la diffusion, est appelée coefficient d'extinction, notée Q_e. Dès lors, l'équation de transfert se réécrit :

$$\frac{dL_\nu}{d\tau_\nu^{tot}} = L_\nu - S_\nu^{tot}$$

En raison de la présence de la luminance dans la fonction source, on voit que cette équation est particulièrement complexe à résoudre, ce qui implique d'en trouver des solutions simplifiées.

Exercices recommandés

11.2.8 page 180.

Quatrième partie

Ondes électromagnétiques dans l'atmosphère

Chapitre 8

Propriétés de l'atmosphère terrestre

8.1 Lois générales concernant les gaz

8.1.1 Équilibre hydrostatique

Soit un volume élémentaire $d\tau = dx\ dy\ dz$ de fluide de masse volumique ρ plongé dans un champ gravitationnel $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ supposé uniforme. Le volume est soumis à deux forces : le poids et la pression P du fluide qui l'environne. Le poids s'exprime :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{df_g} &= \rho d\tau \overrightarrow{g} \\ &= -g\rho d\tau \overrightarrow{u_z} \end{aligned}$$

La force de pression s'exprime, elle, sur chaque côté du volume :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{df_p} &= P(x,y,z)\cdot(-dy\ dz\ \overrightarrow{u_x}) + P(x+dx,y,z)\cdot(dy\ dz\ \overrightarrow{u_x}) \\ &\quad + P(x,y,z)\cdot(-dx\ dz\ \overrightarrow{u_y}) + P(x,y+dy,z)\cdot(dx\ dz\ \overrightarrow{u_y}) \\ &\quad + P(x,y,z)\cdot(-dx\ dy\ \overrightarrow{u_z}) + P(x,y,z)\cdot(dx\ dy\ \overrightarrow{u_z}) \\ &= (P(x+dx,y,z) - P(x,y,z))dy\ dz\ \overrightarrow{u_x} \\ &\quad + (P(x,y+dy,z) - P(x,y,z))dx\ dz\ \overrightarrow{u_y} \\ &\quad + (P(x,y,z+dz) - P(x,y,z))dx\ dy\ \overrightarrow{u_z} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx\ dy\ dz\ \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial P}{\partial y}dx\ dy\ dz\ \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial P}{\partial z}dx\ dy\ dz\ \overrightarrow{u_z} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}\ P d\tau \end{aligned}$$

Le volume étant supposé à l'équilibre, donc immobile, les deux forces considérées sont égales :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ P = -g\rho\overrightarrow{u_x}$$

Cette relation est appelée **équation fondamentale de l'équilibre hydrostatique**. Dans la forme ci-dessous, elle postule implicitement que le gradient de pression n'est que vertical en raison de la proportionnalité du gradient avec la gravité. Si le gradient de pression n'est pas que vertical, alors le volume n'est horizontalement pas au repos.

La forme différentielle de l'équation impose de lui donner des conditions aux limites pour pouvoir l'intégrer. Elle peut aussi s'appliquer aux corps astrophysiques (planète solide, étoile), etc., parfois en y intégrant d'autres forces en présence (pression de radiation dans une étoile par exemple), et peut parfois prendre une forme semi-intégrée surfacique.

8.1.2 Loi des gaz parfaits

L'approximation des gaz parfaits consiste à considérer que les particules composant un gaz sont ponctuelles et sans interactions mutuelles. De la sorte, si on considère un nombre N de particules composant

n moles, occupant un volume V, alors la pression P et la température T du gaz à l'équilibre sont liées par l'équation d'état suivante, appelée **loi des gaz parfaits** :

$$\begin{aligned} PV &= nRT \\ &= NkT \\ \text{avec :}\quad k &= 1,380658 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1} \qquad \text{constante de Boltzmann} \\ R &= k\mathcal{N}_A \\ &= 8,314\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \qquad \text{constante des gaz parfaits} \\ \text{avec :}\quad \mathcal{N}_A &= 6,02214129 \cdot 10^{23} mol^{-1} \qquad \text{nombre d'Avogadro} \end{aligned}$$

Les paramètres d'état P et T sont des grandeurs dites **intensives** : elles sont définies en chaque point de l'espace et ne peuvent s'additionner en lien avec la quantité de matière présente ; à l'inverse, le nombre de particules N, le nombre de moles n ou le volume V peuvent s'additionner en raison de la quantité de matière, et ne sont pas définies en chaque point de l'espace : elles formes des variables **extensives**.

On peut tirer de la loi des gaz parfaits de multiples relations d'invariance pour un système donné ; par exemple :

$$\begin{aligned} PV &= f(n,T) \\ \frac{P}{T} &= g(n,V) \\ \frac{V}{T} &= h(n,P) \\ \frac{P}{n} &= i(V,T) \\ \frac{V}{n} &= j(P,T) \\ nT &= k(P,V) \end{aligned}$$

Ainsi, si le membre de gauche de ces équations est connu, sans connaître les paramètres du membre de droite, on sait que la connaissance de la valeur d'un seul paramètre du membre de gauche donne immédiatement le deuxième.

8.2 Paramètres thermodynamiques descriptifs

8.2.1 Éléments introductifs

On appelle **psychrométrie** l'étude des mélanges gaz-vapeur ; l'**hygrométrie** est l'étude particulière du mélange air-vapeur d'eau.

La description thermodynamique de l'atmosphère utilise d'abord deux variables d'état classiques : la pression P et la température T. Néanmoins, il faut y ajouter les paramètres donnant la connaissance du contenu en vapeur d'eau de l'air humide. Nous mettons ici l'indice $_d$ pour les termes relatifs à l'air sec (d comme *dry*, « sec » en anglais), et $_w$ pour l'air humide (w comme *wet*).

8.2.2 Éléments liés à la masse volumique

Nous utilisons les grandeurs suivantes liées à la masse volumique [Bosser, 2013] :
— la **masse volumique de l'air sec** ρ_d ;
— la **masse volumique de vapeur d'eau** ρ_w en $kg \cdot m^{-3}$; si on considère que l'air a une composante sèche et une composante humide :

$$\rho = \rho_d + \rho_w$$

avec ρ la masse volumique de l'air humide ;

— l'**humidité spécifique** :

$$q = \frac{\rho_w}{\rho}$$

sans unité ; en pratique on lui applique un facteur multiplicateur de 1000 pour l'exprimer en $g \cdot kg^{-1}$;

— le **rapport de mélange dans l'air sec** :

$$r = \frac{m_w}{m_d}$$

sans unité, rapport des masses d'eau m_w et d'air sec m_d dans un volume donné ; en pratique on lui applique un facteur multiplicateur de 1000 pour l'exprimer en $g \cdot kg^{-1}$;

— le **contenu intégré en vapeur d'eau** (IWV – *Integrated Water Vapor*), en $kg \cdot m^{-2}$, est l'intégrale le long de l'altitude de la masse volumique de vapeur d'eau :

$$IWV = \int_0^\infty \rho_w(h)dh$$

Cette grandeur est accessible par le biais des radiomètres embarqués sur les satellites d'altimétrie spatiale par exemple. Cette grandeur intégrée ne donne donc pas le profil de masse volumique selon l'altitude ;

— la **vapeur d'eau précipitable** (PW – *Precipitable Water*) est le rapport :

$$PW = \frac{IWV}{\rho_\ell}$$

$$\text{avec :} \quad \rho_\ell = 1000\ kg \cdot m^{-3} \qquad \text{masse volumique de l'eau liquide}$$

Si l'air humide est assimilé à un gaz parfait, alors son état est décrit par la loi des gaz parfaits [Bosser, 2013] :

$$\begin{aligned}
P &= \rho a T \\
\text{avec :} \quad a &= R_d \frac{1+\epsilon\, r}{1+r} \\
r &= \frac{m_w}{m_d} \qquad \textit{vide supra} \\
\epsilon &= \frac{R_w}{R_d} \\
&\approx 0,6220 \\
\text{où :} \quad R_w &= \frac{R}{M_{mol,w}} \\
&= 461,51\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1} \qquad \text{constante spécifique de la vapeur d'eau} \\
R_d &= \frac{R}{M_{mol,d}} \\
&= 287,04\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1} \qquad \text{constante spécifique de l'air sec}
\end{aligned}$$

8.2.3 Températures

Nous pouvons définir un certain nombre de températures [Bosser, 2013] :

— la **température de rosée** T_d, en K, à partir de laquelle la vapeur d'eau se condense à une pression partielle e donnée ;

— la **température humide** T_h, en K, celle de l'équilibre entre l'eau et l'air sec, à une pression partielle e donnée, c'est-à-dire qu'il n'y a ni condensation ni évaporation ;

— la **température virtuelle** :

$$T_v = T\frac{1+\epsilon\, r}{1+r}$$

C'est la température que doit avoir l'air sec pour avoir la même densité que l'air humide à la même pression.

8.2.4 Pressions

Nous utiliserons en particulier les grandeurs de pression suivantes [Bosser, 2013] :
— la **pression partielle de l'air sec** P_d ;
— la **pression partielle de vapeur d'eau** e en Pa ; alors la **loi de Dalton** [1] donne :

$$P = P_d + e$$

avec P la pression totale de l'air humide ;
— la **pression de vapeur saturante** e_s est la pression partielle maximale de vapeur d'eau dans des conditions de pression et de température données. Un air dont la vapeur d'eau est à la pression de vapeur saturante est appelé air saturé ; la pression partielle de vapeur d'eau ne peut dépasser la pression de vapeur saturante : au-delà, se forme du brouillard, et la pression partielle de vapeur d'eau y est bloquée à la pression de vapeur saturante [Kasser, 1985]. La pression de vapeur saturante peut être exprimée en fonction de la température humide par les relations de **Goff-Gratch** (1946) ou **Magnus-Tetens-Murray** (1967) [Kasser, 1985], respectivement (e_s en $mm\ Hg$ [2] et T_h en $°C$) :

$$e_s = \exp\left(1,53 + 0,071\ T_h - 0,000222\ T_h^2\right)$$

$$e_s = 4,5812 \exp\left(\frac{17,269\ T_h}{237,5 + T_h}\right) \quad \text{si le manchon du thermomètre est humide, non gelé}$$

ou : $$e_s = 4,5812 \exp\left(\frac{21,875\ T_h}{265,5 + T_h}\right) \quad \text{si le manchon du thermomètre est recouvert de glace}$$

Une autre formulation empirique en fonction de la température est [Bosser, 2013] :

$$e_s(T) = 611 \cdot 10^{7,5 \cdot \frac{T-273,15}{T-35,85}}$$

Qualitativement, on peut vérifier que la pression de vapeur saturante e_s est une fonction croissante de la température, ce qui signifie que la capacité de l'air à contenir de la vapeur d'eau augmente avec sa température (ce que l'on peut aisément constater sur les courbes rouges de la figure 8.1 page suivante) ;
— l'**humidité relative de l'air**, exprimée en %, est le rapport entre la pression partielle de vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante à la température de l'air :

$$RH = \frac{e}{e_s(T)}$$

L'humidité relative de l'air ne peut dépasser 100% ; à ce stade, la pression partielle de vapeur d'eau est égale à la pression de saturation, et l'eau supplémentaire contenue dans un volume d'air ne peut plus prendre la forme gazeuse : le brouillard se forme.

1. John Dalton, 1766 – 1844.
2. 760 $mm\ Hg$ équivalent à 101325 Pa.

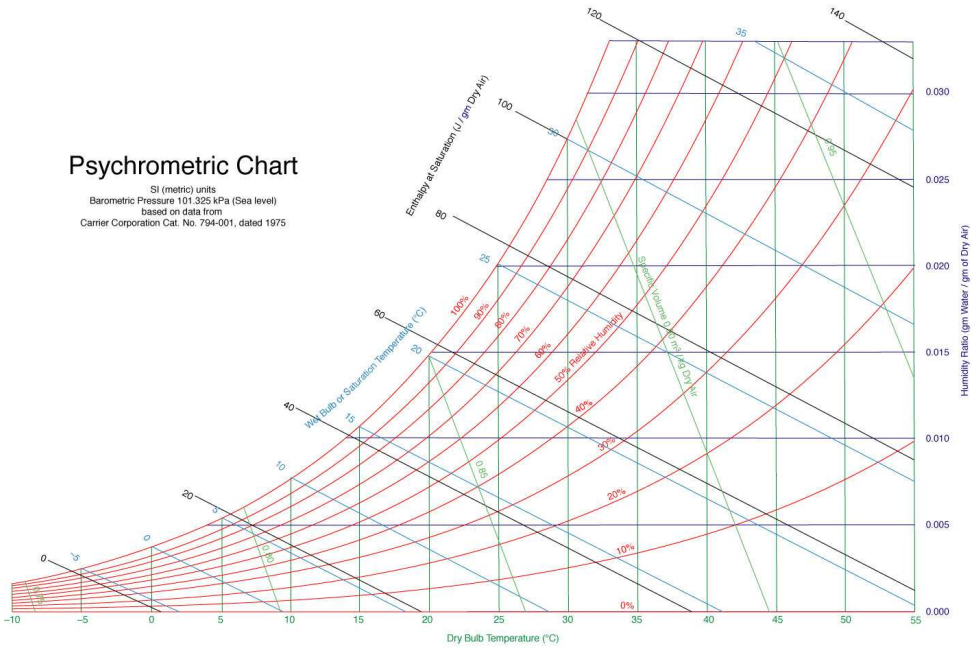


Figure 8.1 – **Charte psychrométrique : température de rosée (en bleu, droites obliques) en fonction de la température de l'air sec (en vert, axe horizontal), pour différentes valeurs de l'humidité relative (en rouge) et rapport de mélange dans l'air sec (en violet, axe vertical).**

8.3 Caractérisation de l'atmosphère terrestre

8.3.1 Composition

Le tableau 8.1 donne les abondances relatives en volume des composants de l'atmosphère terrestre. Le diazote et le dioxygène y sont majoritaires.

Diazote	78,084%
Dioxygène	20,946%
Argon	0,9340%
Dioxyde de carbone	0,0386%
Vapeur d'eau	de moins de 1% à 4%

Table 8.1 – Abondances en volume de l'atmosphère terrestre « sèche » (sauf vapeur d'eau). Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosph%C3%A8re_terrestre.

8.3.2 Histoire

La figure 8.2 montre que la composition atmosphérique actuelle n'a pas toujours été identique dans l'histoire de la Terre.

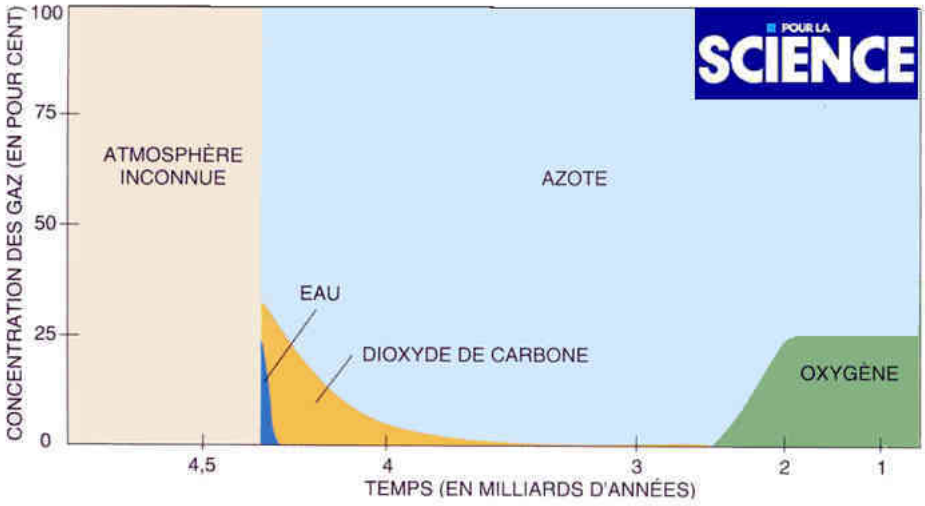


Figure 8.2 – Historique de la concentration des gaz dans l'atmosphère terrestre. Source : revue *Pour la science*, à partir du site de l'École normale supérieure, à l'adresse http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/co2-depuis-4ga.xml.

8.3.3 Structure verticale

8.3.3.1 Couches de l'atmosphère

En raison de la forme de la Terre, la structure de son atmosphère lui est concentrique, et dépend essentiellement de l'altitude. Si elle fait l'objet d'un mélange homogène du fait de l'intense circulation qu'elle connaît, du moins à faible altitude, elle n'en est pas moins structurée en couches concentriques. Celles-ci peuvent être différentes selon l'aspect auquel on s'intéresse (voir table 8.2 page suivante).

La photodissociation des molécules a lieu à partir de la thermosphère, tandis que les atomes, aux altitudes plus élevées, se structurent de façon diffuse par masse atomique. La température est autour de 200 K à partir d'une dizaine de kilomètres d'altitude et conserve approximativement cette valeur dans la stratosphère ; elle diminue légèrement dans la mésosphère, mais remonte à environ 1500 K dans la thermosphère et l'exosphère.

8.3.3.2 L'ionosphère

L'**ionosphère** est une couche de l'atmosphère terrestre située d'une cinquantaine à quelques centaines de kilomètres d'altitude, donc à cheval sur la mésosphère et la thermosphère. C'est un plasma, c'est à dire

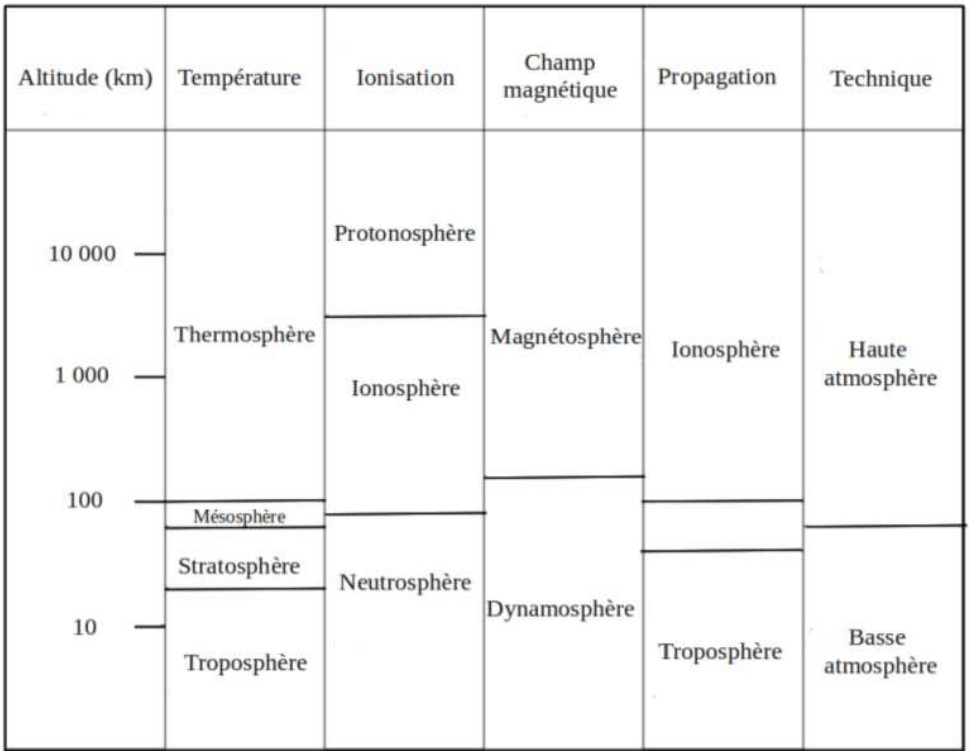


Table 8.2 – Structures verticales de l'atmosphère terrestre. Source : [Nahmani, 2012].

un milieu ionisé, notamment par l'action des radiations et du vent solaires. L'ionisation varie dans le temps, selon l'heure dans la journée (maximum vers midi), ainsi que selon le cycle solaire de 11 ans. Ce n'est toutefois pas un milieu homogène ; il est structuré en couches aux propriétés différentes [Delobeau, 1967].

a) La formation de l'ionosphère Le mécanisme général peut être résumé à l'équation bilan de **photo-ionisation** :

$$A + h\nu \quad \longrightarrow \quad A^+ + e^-$$

où A est l'atome neutre, A^+ est l'atome ionisé, $h\nu$ est l'énergie du photon de fréquence ν, h est la constante de Planck, et e^- est l'électron. La gamme de fréquence des rayonnements ionisant les particules va des ultraviolets aux rayons X. La composition stratifiée (expression à nuancer, puisque dans la basse atmosphère le brassage permet de dire qu'il s'agit d'un mélange, tandis qu'en altitude, la pression diminue et l'on trouve majoritairement de l'hélium et de l'hydrogène) de l'atmosphère fait que l'atome A n'est pas le même selon l'altitude où l'on se trouve.

On définit le **degré d'ionisation** α par :

$$\alpha \quad = \quad \frac{[A^+]}{[A] + [A^+]}$$

où [ ] représente la concentration.

La première théorie de la photo-ionisation ionosphérique est due à Sydney Chapman (1888 – 1970).

b) La basse ionosphère La théorie de Chapman ne prévoit qu'une seule couche ; il s'agit bien sûr d'une approximation. La basse ionosphère est une couche où l'on distingue deux régions : la région D et la région E.

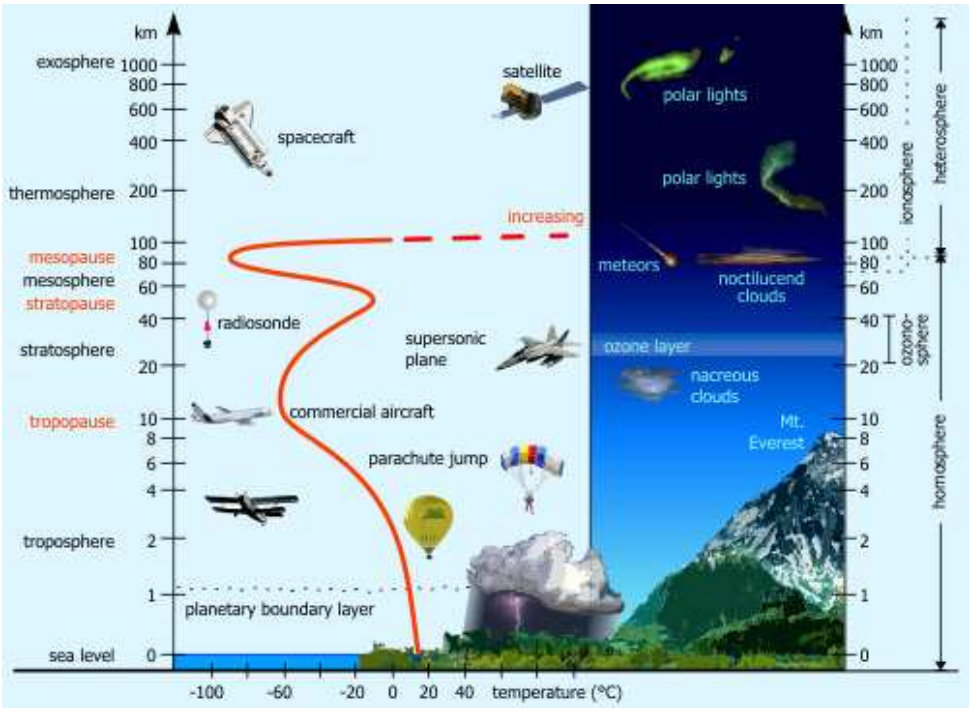


Figure 8.3 – Structure de l'atmosphère de la Terre. Source : http://www.theozonehole.com/atmosphere.htm.

i) La région D La **région D** est située entre 60 et 85 km, et sa composition est proche de celle de la basse atmosphère. La température y prend des valeurs situées entre 130 et 250°C. Les collisions entre électrons et atomes y sont fréquentes, bien que la densité électronique y soit faible, de l'ordre de 10 cm^{-3} à 60 km, et de quelques milliers 25 km plus haut. Les sondages de cette région sont difficiles, si bien qu'il n'est pas aisé de connaître précisément les limites de cette région. Deux mécanismes d'ionisation peuvent y être invoqués :

— NO, bien que rare, libère un nombre non négligeable d'électrons sous l'effet du rayonnement dans la raie Lyman[3] α (entre 912 et 1216 nm) ;
— en période de forte activité solaire, N_2 et O_2 peuvent libérer des électrons.

Il apparaît qu'en été, il y a de fortes variations entre le jour et la nuit dans cette région, mais pas en hiver. Si bien qu'en hiver, la couche basse se renforce aux latitudes polaires.

Du point de vue de la transmission du signal, **la région D est fortement absorbante pour les ondes radio-électriques**, et ce d'autant plus que la fréquence est basse. Elle se comporte alors comme un véritable miroir métallique, la Terre et cette région formant alors un guide d'ondes.

ii) La région E La **région E** se trouve immédiatement au dessus de la précédente, de 85 à 130 km, et le taux d'ionisation y est plus élevé (densité de l'ordre de 10^5 cm^{-3}). Elle peut être étudiée par sondages radio-électriques, et se caractérise par une augmentation rapide de la concentration électronique volumique avec l'altitude. La fréquence critique de la région E est de l'ordre du mégahertz. Celle-ci est notamment fonction de la position par rapport au soleil. La région est sensible notamment aux rayons ultraviolets du soleil. Ainsi les courtes longueurs d'ondes (2 à 8 Å, et 33,7 Å) ionisent O_2 et N_2 à la base de la région. Les molécules ionisées donnent ensuite naissance à NO^+. À une altitude plus élevée, entre 95 et 115 km, l'extrême ultraviolet donne O_2^+, aussi répandu que NO^+.

c) La haute ionosphère **L'ionosphère supérieure** débute vers 140 km, et a une épaisseur très importante mais difficile à quantifier. En revanche il est assez facile de définir l'altitude d'ionisation maximale h_m, qui se situe entre 250 et 500 km. Elle ne contient qu'**une région, appelée F**, qui se décompose

3. Théodore Lyman, 1874 – 1954.

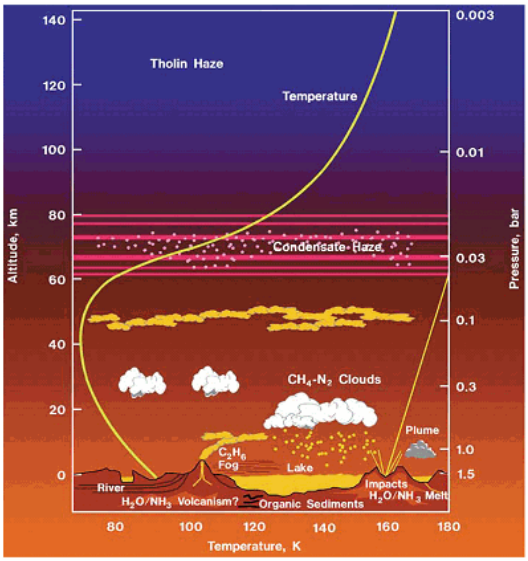


Figure 8.4 – **Structure de l'atmosphère de Titan.Source : http://astronomy.nmsu.edu/tharriso/ast105/Saturn.html.**

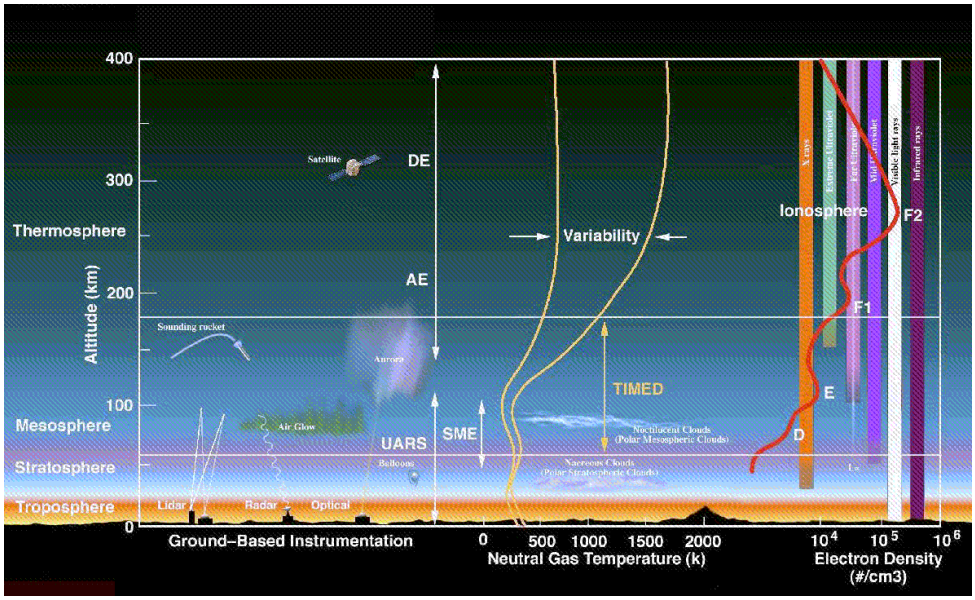


Figure 8.5 – **Structure de l'atmosphère avec accent sur l'ionosphère. Source *Center for Integrated Space Weather Modeling*, à l'adresse http://www.bu.edu/cism/CISM_Thrusts/ionosphere-atmosphere.html.**

en deux couches, F1 où la concentration électronique volumique augmente moins fortement qu'en E, la couche F2 où la concentration atteint son maximum (de l'ordre de 10^6 cm^{-3}), et au delà de laquelle elle diminue.

La **couche F1** apparaît avec le soleil, et il n'est pas toujours possible de définir une fréquence critique. Quand elle existe, elle suit cependant les prévisions de Chapman. La **couche F2** est celle qui donne à la région F toute sa complexité et recèle toutes ses anomalies par rapport à des théories simples. Il apparaît notamment que la distribution spatiale de la fréquence critique ne présente pas de maximum présent sur l'équateur, ni géographique ni magnétique, mais le long de deux ceintures de part et d'autres de celui-ci, à 10-15° de latitude. L'ionisation en fonction de l'heure locale et de la saison est assez déroutante, puisqu'elle est maximale en hiver, qu'aux pôles il y a une variation diurne même si l'ionosphère est éclairée ou dans l'obscurité en permanence, et que de nuit l'ionisation reste prépondérante dans la région équatoriale, indépendamment de l'heure, de la saison ou de l'époque de cycle solaire. À cela s'ajoute l'influence du champ magnétique terrestre. La région F1 réfléchit les ondes courtes diurnes, tandis que la couche F2 réfléchit les ondes courtes nocturnes.

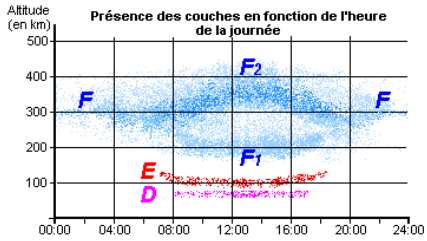


Figure 8.6 – Évolution des couches de l'ionosphère dans la journée. Source : http://f6gci.free.fr/2%20ionosphere.html.

Par ailleurs, l'ionisation dans la région F n'obéit pas à la théorie de Chapman car celle-ci néglige plusieurs phénomènes par hypothèse, comme la modification de la composition du gaz avec l'altitude, les autres modes de libération d'électrons (par collisions), le captage des électrons par plusieurs processus (recombinaison, attachement sur les atomes et molécules électronégatifs comme O_2 et O), ainsi que les mouvements d'ensemble des charges liés aux forces électromagnétiques, aux gradients de température, aux marées luni-solaires, à la diffusion dans le champ de pesanteur.

8.3.3.3 Les ceintures de Van Allen

Les ceintures de Van Allen[4] **sont des régions de confinement de particules chargées** en raison de l'induction magnétique terrestre, situées au dessus de l'ionosphère, et qui la rejoignent aux pôles magnétiques. Même si ce n'est pas *stricto sensu* l'ionosphère, nous allons en dire quelques mots. Elles ont été découvertes à la fin des années 1950 à l'occasion des premiers lancements de satellites artificiels, notamment les *Spoutnik* soviétiques et *Explorer* américains. Van Allen et ses collègues de l'université de l'Iowa les ont mis en évidence en enregistrant, sur des compteurs Geiger[5] embarqués sur les *Explorer*, des impacts en nombre bien plus important que prévu.

Les ceintures se structurent en deux : l'une, intérieure (entre 1 et 2 rayons terrestres), où se trouvent des protons ; l'autre, extérieure (entre 3 et un peu plus de 4 rayons terrestres), où vivent des électrons. Les protons de la ceinture intérieure sont d'origine cosmique, et ils peuvent entrer en collision avec les noyaux d'azote et d'oxygène de l'atmosphère, donnant naissance à des neutrons, instables, qui se désintègrent selon le mécanisme de radioactivité β :

$$n \longrightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}_e + 780\ keV$$

où n est le neutron, p^+ le proton, e^- l'électron, $\overline{\nu}_e$ l'anti-neutrino électronique. Selon les conditions cinématiques de naissance du neutron, celui-ci peut, ou pas, se diriger vers la zone d'induction magnétique. Il semblerait cependant que l'origine neutronique des protons de la ceinture intérieure ne soit pas unique. Mais si les phénomènes de créations restent mal connus, ceux des pertes le sont bien mieux : chocs avec les composants atmosphériques et existence d'ondes hydromagnétiques causant des variations d'induction. Si les protons constituent l'essentiel de la population de la ceinture intérieure, on y trouve aussi des électrons, dont il est difficile de savoir quelque chose. On passe cependant de façon à peu près continue dans la ceinture extérieure où, revanchards, ils sont majoritaires.

Le cœur de la ceinture extérieure est à une vingtaine de milliers de kilomètres, mais la frontière extérieure est très nette, matérialisée par la limite de l'induction terrestre. C'est un milieu très ténu, et on estime à une quinzaine de kilogrammes la masse d'électrons situés dans cette zone. La ceinture externe est assez mal connue, car les électrons qui s'y trouvent varient temporellement en nombre, en énergie, en flux, notamment en période d'orage magnétique.

L'intérêt porté à cette région provient du fait que les satellites des constellations de positionnement par satellites sont situés dans les ceintures de Van Allen. Par exemple, une des mission des satellites prototypes de GALILEO, GIOVE-A et GIOVE-B, était d'explorer ce milieu pour mieux le connaître avant la phase de déploiement de la constellation nominale.

8.3.3.4 Quelques modèles thermodynamiques de structure verticale de l'atmosphère neutre et sèche

a) Atmosphère homogène On suppose que l'atmosphère est sèche et a une masse volumique homogène, notée ρ_0. On part de l'équation de l'équilibre hydrostatique :

4. James Alfred Van Allen, 1914 – 2006.
5. Hans Geiger, 1882 – 1945.

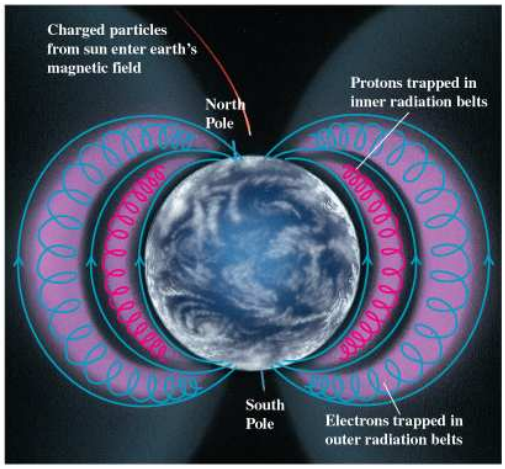


Figure 8.7 – Ceintures de Van Allen. Source : Université de San José, à l'adresse `http://www.physics.sjsu.edu/becker/physics51/mag_field.htm`**.**

$$dP = -\rho_0 g \, dz$$

Si on suppose le champ de pesanteur g indépendant de l'altitude, noté donc g_0, alors [Bosser, 2013] :

$$P(z) = P(z=0) - \rho_0 g_0 z$$

avec z l'altitude au dessus de la surface $z = 0$. Dans le cadre du modèle de gaz parfait, on obtient ainsi la loi de description de la température :

$$T(z) = T(z=0) - \frac{g_0}{R_d} z$$

On voit donc que les grandeurs thermodynamiques décrivant l'atmosphère homogène à toute altitude sont uniquement déterminées par les valeurs de ces paramètres au sol.

b) Atmosphère isotherme On suppose que l'atmosphère est sèche, et a une température uniforme, notée T_0. En repartant de l'équation de l'équilibre hydrostatique et en supposant encore que le champ de pesanteur est uniforme, on aboutit à la description suivante de la pression selon l'altitude [Levallois, 1969] :

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z=0) \, \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \\ \text{avec :} \quad h &= \frac{R_d T_0}{g_0} \end{aligned}$$

c) Atmosphère à gradient thermique constant On suppose désormais que la température suit la loi suivante :

$$T(z) = T(z=0) - \alpha z$$

En supposant toujours que l'air est un gaz parfait, que le champ de pesanteur l'est aussi, et en utilisant l'équation de l'équilibre hydrostatique, nous obtenons [Levallois, 1969] :

$$P(z) = P(z=0) \left(\frac{T(z=0) - \alpha z}{T(z=0)}\right)^{g_0/\alpha R_d}$$

d) Modèle USSA76 Le modèle USSA76 (*United States Standard Atmosphere*) suppose l'atmosphère sèche[6]. Le modèle de pesanteur utilisé repose sur la relation suivante [Bosser, 2013] :

$$g(z) \quad = \quad g(z=0)\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + z}\right)$$

avec $R_\oplus$ le rayon de la Terre. Un paramètre du modèle est l'altitude géopotentielle H :

$$H \quad = \quad \frac{R_\oplus z}{R_\oplus + z}$$

Naturellement, l'équilibre hydrostatique doit se réécrire avec ce paramètre :

$$dP(z) \quad = \quad -\rho(z)\; g(z)\; dH(z)$$

En utilisant ensuite la relation des gaz parfaits pour l'air sec, on peut calculer la fonction de pression selon l'altitude à partir de gradients de température définis par morceaux en fonction de H dans une table (non donnée ici, voir [Bosser, 2013]) et pour des latitudes tempérées.

8.3.3.5 Variation temporelle

Les modèles présentés ci-avant sont vrais en moyenne dans le temps. En particulier, l'oscillation saisonnière donne à la durée de l'éclairement solaire une variation de période annuelle mais, en plus, elle lui fait subir une amplitude diurne variable au cours de l'année, qui se traduit par une variation diurne de la température : celle-ci est minimale peu avant l'aube, et maximale quelque temps après midi solaire local. Deux sources d'énergie contribuent à cette variation :

— l'**éclairement solaire direct**, dont la période est la durée du jour solaire moyen, et qui est peu absorbée par l'atmosphère dans le visible ;
— la **restitution d'énergie thermique du sol**, chauffé par le Soleil, dont le temps caractéristique dépend de la nature du sol, et que la basse atmosphère absorbe, mais qui se diffuse de la base de l'atmosphère vers l'altitude, en vertu de l'équation de la chaleur.

L'amplitude de la variation thermique est d'autant plus importante que l'on est proche du sol, mais il n'est pas rare de constater plusieurs inversions thermiques dans les premiers hectomètres d'altitude : ainsi un modèle de gradient thermique constant n'est réaliste qu'à partir d'une certaine altitude, de quelques centaines de mètres voire quelques kilomètres.

8.3.4 Structure latitudinale

Les **climats** sont variés sur la Terre, et liés à quantité de paramètres, notamment l'ensoleillement[7], les vents, la présence de mers et d'océans, et de courants en leur sein, ou d'eau continentale, de végétation, le relief, etc. ; mais certains de ces éléments, en particulier la végétation, ou les glaciers, dépendent de façon importante du climat, ce qui fait de celui-ci un système très complexe dont les rétroactions peuvent être positives, négatives, et de toute façon difficiles à quantifier.

Un élément d'homogénéisation de composition et de température dans l'atmosphère est le système des vents, qui connaît une structure dépendant de la latitude. Les régions équatoriales, fortement ensoleillées, connaissent une forte évaporation, qui génère des courants d'air chaud et humide ascendants, générant également de fortes pluies. Ces courants forment une cellule de convection, dite de **Hadley**[8], qui boucle au niveau des tropiques, où des courants d'air froid et sec descendants entraînent la présence de déserts. Cet air vient des hautes altitudes, de la zone équatoriale et de la zone tempérée, où se trouve une seconde cellule de convection, dite de **Ferrel**[9]. L'air froid et sec des déserts glisse vers les hautes latitudes à basse altitude, se charge d'humidité et se réchauffe, au point de devenir ascendant autour de 50° de latitude,

6. Voir http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539_1977009539.pdf.
7. L'ensoleillement dépend de nombreux phénomènes, d'abord astronomiques, comme l'activité solaire, l'évolution séculaire des paramètres orbitaux ou les saisons, mais aussi de phénomènes terrestres, comme l'albédo du sol, de l'atmosphère, la formation de nuages, etc.
8. George Hadley (1685 – 1768).
9. William Ferrel (1817 – 1891).

d'y causer d'importantes pluies, et d'en faire des zones tempérées thermiquement. Une cellule similaire à celle de Hadley se met alors en place jusqu'au pôle, où un air froid et sec descend des hautes altitudes vers le sol. Les régions d'air descendant sont plutôt des zones à anticyclones, c'est-à-dire à hautes pressions, tandis que les régions à courants ascendants sont des zones dépressionnaires, c'est-à-dire de basse pression.

La rotation de la Terre adjoint à ce schéma un autre phénomène, lié au terme de **Coriolis**[10] dû à la nature non-galiléenne du référentiel qu'est la Terre en rotation, à savoir les boucles de circulation des vents en longitude, qui tournent dans le sens direct dans l'hémisphère nord, et dans le sens indirect dans l'hémisphère sud[11].

Il est à noter aussi que, dans les régions tropicales, l'alternance entre saison sèche et saison des pluies touche principalement à la hauteur du Soleil ; ainsi dans l'hémisphère nord, pour les lieux de latitude inférieure à celle du tropique du Cancer, la saison des pluies, appelée hivernage en Afrique de l'ouest et mousson en Asie, correspond à l'été, lorsque le Soleil, ayant atteint le Tropique, se dirige à nouveau vers le sud. La saison sèche a deux phases, une de rafraîchissement, après la saison des pluies, entre l'équinoxe d'automne et le solstice d'hiver, puis une phase de réchauffement, à partir de celui-ci jusqu'à celui d'été. Naturellemnt, ce schéma général peut connaître des modulations régionales liés à la géographie et aux interactions avec l'océan.

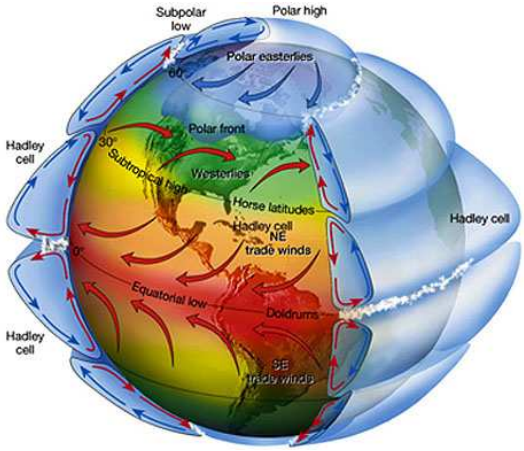


Figure 8.8 – Les cellules de convection de l'atmosphère terrestre. La cellule de Ferrel monte un peu trop au nord. Source : site internet du GSFC, à l'adresse http://rst.gsfc.nasa.gov/Sect14/Sect14_1c.html

8.3.5 Transparence

L'atmosphère terrestre n'est pas uniformément transparente dans le spectre électromagnétique : elle l'est principalement dans les **domaines optique et radio** (voir figure 8.9).

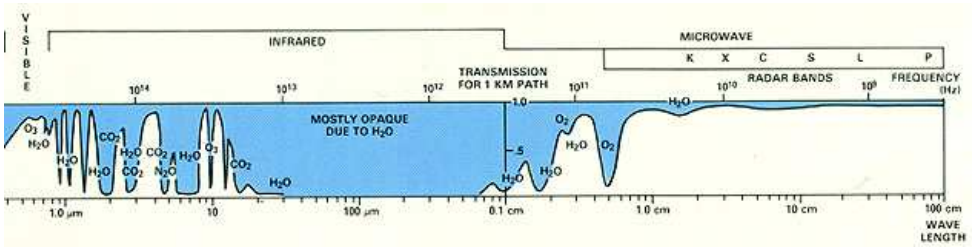


Figure 8.9 – La transparence de l'atmosphère aux différentes longueurs d'onde. Source : http://www.fas.org/irp/imint/docs/rst/Intro/Part2_4.html**.**

8.3.6 Le spectre solaire

Le spectre du rayonnement du Soleil se présente en première approximation comme celui d'un corps noir à 5800 K (voir page 61 et figure 8.10 page suivante), dont le maximum est dans

10. Gaspard-Gustave Coriolis (1792 – 1843).
11. Il est nécessaire de mettre un terme à une légende : la force de Coriolis n'a aucune influence sur le sens d'écoulement de l'eau de votre bain !

le visible. Il est néanmoins strié de raies d'absorption de Fraunhofer (voir page 67) dues aux éléments absorbants de sa photosphère (voir figure 8.11). Ainsi, au sommet de l'atmosphère, avant d'y pénétrer, son spectre est, moyennant ces bandes d'absorption, semblable à celui d'un corps noir ; en revanche, après traversée de l'atmosphère, il est atténué en amplitude et marqué des bandes d'absorption de l'atmosphère en plus de celles du Soleil ; enfin, quelques mètres sous le niveau de la mer, l'absorption est bien plus notable, notamment en rouge et infrarouge (voir figure 8.10).

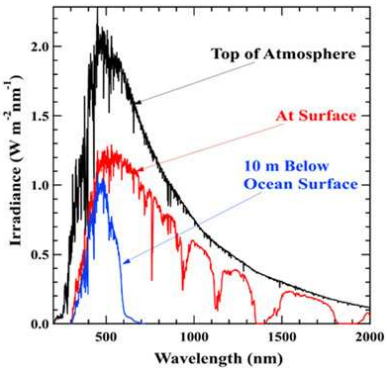


Figure 8.10 – Le spectre solaire hors de l'atmosphère, au niveau du sol, et à $10\ m$ **de profondeur d'eau. Source :** http://butane.chem.uiuc.edu/pshapley/GenChem2/A2/1.html.

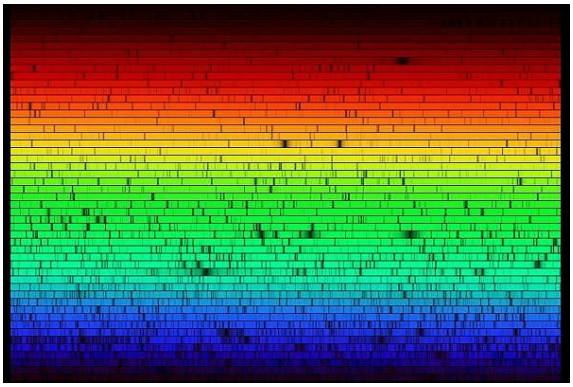


Figure 8.11 – Le spectre visible du Soleil avec ses raies d'absorption. Source : http://chinook.kpc.alaska.edu/~ifafv/lecture/fraunhofer.htm.

8.3.7 Bilan radiatif de la Terre

On appelle **constante solaire** l'énergie rayonnée par le Soleil arrivant au niveau de la Terre ; celle-ci, appelée constante solaire, vaut environ :

$$\mathcal{E}_{\odot\to\oplus} = 1360,8 W \cdot m^{-2}$$

Cette quantité est répartie, grâce à la rotation de la Terre sur elle-même et aux mouvements de l'atmosphère, à la surface de la Terre. La portion de flux solaire capté par la Terre l'est par la section efficace $\pi r_\oplus^2$, mais la surface de la sphère terrestre vaut $4\pi r_\oplus^2$, si bien que l'éclairement arrivant réellement à la surface terrestre vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\odot\to T} &= \mathcal{E}_{\odot\to\oplus} \times \frac{\pi r_\oplus^2}{4\,\pi r_\oplus^2} \\ &= 340\ W \cdot m^{-2}\end{aligned}$$

8.3.7.1 Régime stationnaire

Le schéma général est le suivant (voir figure 8.12 page suivante) [Bosser, 2013] :

- l'**éclairement incident** est de l'ordre de $340\ W{\cdot}m^{-2}$ sur la surface de la Terre, qui se transforment ainsi :
  - $105\ W{\cdot}m^{-2}$ sont directement réfléchis vers l'espace (soit un albédo de l'ordre de 0,31), provenant de :
    - l'atmosphère : $75\ W \cdot m^{-2}$;
    - la surface terrestre : $30\ W \cdot m^{-2}$.
  - ce qui n'est pas réfléchi directement, soit $235\ W \cdot m^{-2}$, se répartit ainsi :
    - l'atmosphère absorbe $65\ W \cdot m^{-2}$;
    - la Terre absorbe $170\ W \cdot m^{-2}$.
- environ $100\ W \cdot m^{-2}$ sont **perdus par le sol terrestre** par des processus ne relevant pas du rayonnement, mais de la chimie, à l'atmosphère, par évaporation, condensation et conduction thermique ;

- 390 $W \cdot m^{-2}$ sont **émis par la surface terrestre** sous forme de rayonnement, se répartissant ainsi :
  - 40 $W \cdot m^{-2}$ sont directement émis par le sol terrestre vers l'espace ;
  - 350 $W \cdot m^{-2}$ sont absorbés par l'atmosphère, principalement en raison de l'action absorbante des gaz dits à effet de serre dans le domaine infrarouge (H_2O, CO_2, CH_4, N_2O, O_3, etc.) ; cette quantité se transforme ainsi :
    - l'atmosphère en réémet 320 $W \cdot m^{-2}$ vers la Terre ;
    - le reste, 30 $W \cdot m^{-2}$ est réémis vers l'espace.
- **l'atmosphère émet d'elle-même** 165 $W \cdot m^{-2}$, provenant des $100 + 65$ $W \cdot m^{-2}$ de la transmission chimique de la Terre à l'atmosphère et de l'absorption directe de rayonnement solaire par l'atmosphère ;
- **au final, l'éclairement sortant de la Terre est de** 340 $W \cdot m^{-2}$, correspondant à $105 + 165 + 40 + 30$ $W \cdot m^{-2}$, respectivement de la réflexion immédiate, de l'émission propre de l'atmosphère, de la réflexion terrestre directe, et de l'émission thermique après absorption du rayonnement terrestre.

Ce schéma général traduit une situation de régime stationnaire : la température est stable et la quantité d'énergie entrante est égale à la quantité d'énergie sortante.

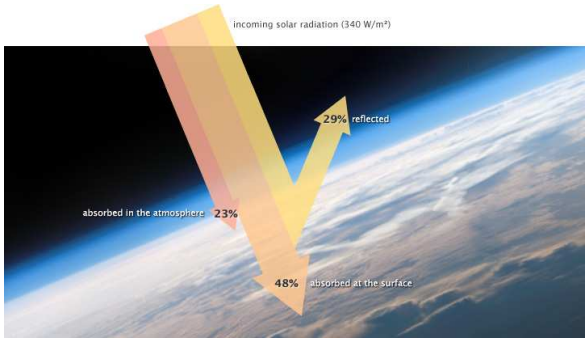


Figure 8.12 – Radiations solaires transmises, absorbées et réfléchies par la Terre. Source : NASA.

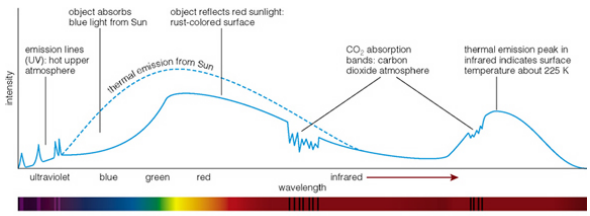


Figure 8.13 – Spectre général d'émission des planètes. Source : http://cse.ssl.berkeley.edu/bmendez/ay10/2002/notes/lec8.html.

8.3.7.2 Le forçage thermique dû aux gaz à effet de serre

Ce à quoi l'on assiste avec la hausse des concentrations de gaz à effet de serre, c'est une perturbation de cette situation d'équilibre : le système reçoit toujours autant d'énergie, mais en perd moins (voir figure 8.14 page suivante). **Les GES absorbent le rayonnement infrarouge restitué par la Terre du fait de sa température**, liée au chauffage qu'elle subit dans le domaine visible en raison de la transparence de l'atmosphère dans cette fenêtre (voir figure 8.15 page 128). Absorbant le rayonnement infrarouge, les molécules transforment l'énergie qui lui est associée en énergie cinétique d'agitation par vibration (modification des angles des liaisons et de leur longueur) : la température augmente.

8.3.8 Spectre solaire observé, spectre réfléchi

Les phénomènes liés à la réflexion, la transmission, la diffusion, l'absorption du rayonnement solaire avec l'atmosphère terrestres sont nombreux et complexes. On peut cependant voir sur la figure 8.10 page précédente que le spectre solaire observé dans le visible après sa traversée de l'atmosphère est distinct de celui qui arrive au sommet de l'atmosphère, pour plusieurs raisons :

- la diffusion en λ^{-4} fait que les courtes longueurs d'onde sont plus diffusées que les grandes ;
- hors du visible, l'ozone filtre l'ultra-violet, et beaucoup de molécules filtrent dans l'infrarouge (voir les figures 8.16 page 128 et 8.17 page 128).

Le rayonnement réfléchi par la Terre, ainsi que par l'atmosphère, ressemble naturellement au spectre du Soleil, mais il porte aussi la marque des raies d'absorption visibles de l'atmosphère terrestre. De surcroît, si les GES absorbent dans l'infrarouge, ils n'absorbent pas tout le rayonnement infrarouge, si

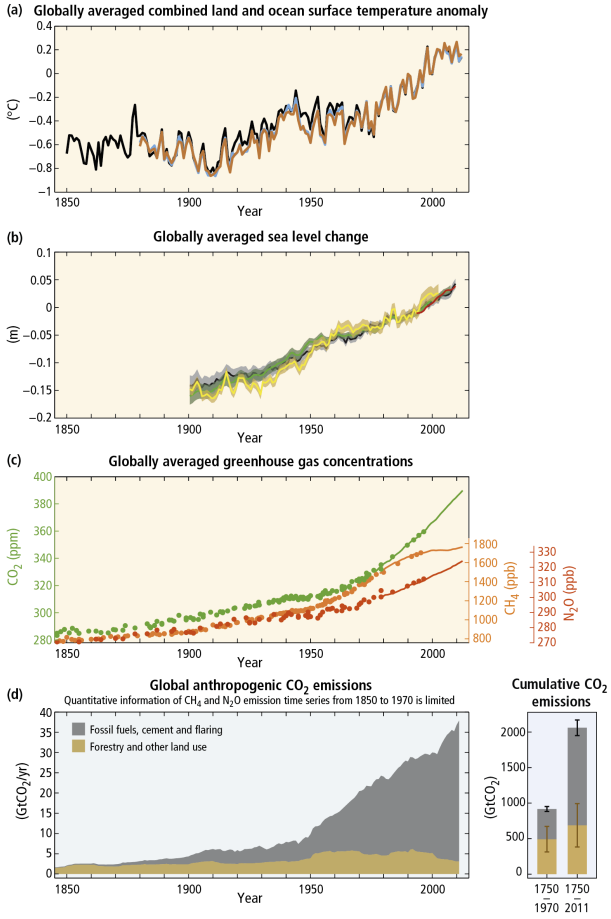


Figure 8.14 – Évolution des indicateurs globaux du changement climatique du 1850 à 2011. Source : [IPCC, 2013].

bien que le rayonnement thermique terrestre s'y exprime, avec cependant la marque, sous la forme de raies d'absorption, de ces molécules (voir figure 8.18 page suivante). La mesure des quantités de rayonnement émises par la Terre dans les longueurs d'onde thermiques permet notamment de mesurer la température (voir figures 8.19 page 129 et 8.20 page 129).

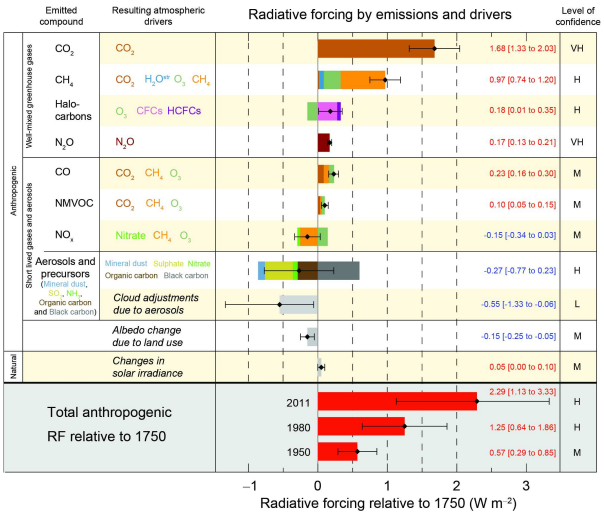


Figure 8.15 – Forçage radiatif des différents gaz à effet de serre en 2011 par rapport à 1750, par émission, facteur atmosphérique en découlant, et degré de confiance dans la valeur estimée. Source : [IPCC, 2013].

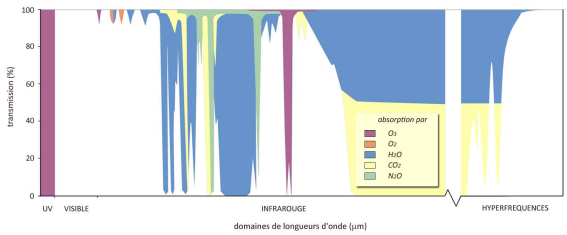


Figure 8.16 – Transmission relative de l'atmosphère de l'ultra-violet aux hyperfréquences et molécules associées. Source : NASA.

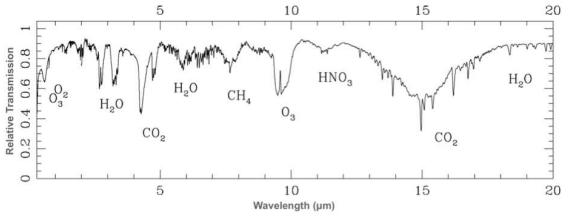


Figure 8.17 – Spectre de transmission relative de l'atmosphère dans l'infrarouge. Source : http://sitn.hms.harvard.edu/flash/2012/issue110/.

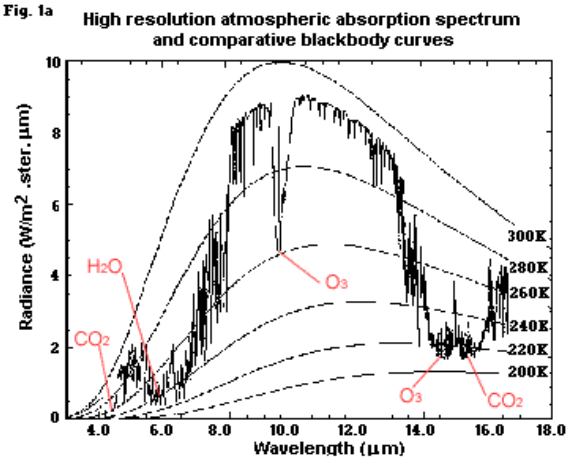


Figure 8.18 – Spectre d'émission de la Terre dans l'infrarouge, avec raies d'absorption, et comparaison avec les courbes des corps noirs de température proche.

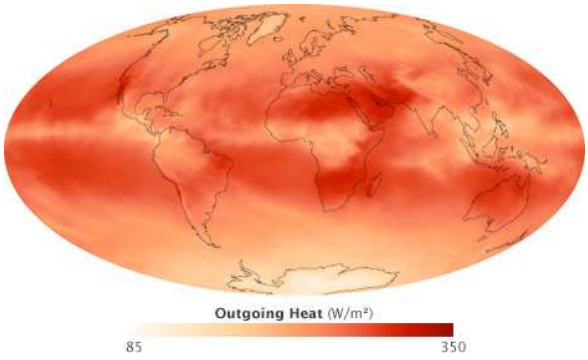


Figure 8.19 – Énergie thermique émise par la Terre. Source : NASA.

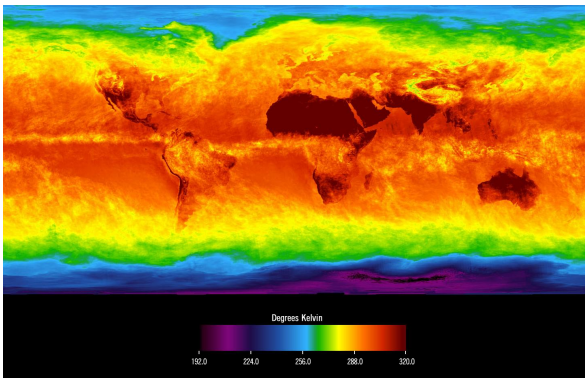


Figure 8.20 – Température de surface de la Terre. Source : NASA.

Chapitre 9

Réfraction et tranfert radiatif atmosphérique

9.1 Propagation troposphérique

9.1.1 La troposphère : un diélectrique

Dans le cas de la **troposphère**, si certains paramètres physiques ne sont évidemment pas homogènes, comme la pression et la température, il s'agit cependant d'un milieu où les vents assurent un important brassage de l'air, que l'on peut considérer de composition homogène : l'essentiel en est constitué de molécules et atomes sans moment dipolaire (N_2, O_2, gaz rares, CO_2) ou avec (H_2O) ; pour l'eau, le fait d'avoir affaire à un gaz rend aléatoire l'orientation des molécules et donc du moment dipolaire. L'air, sec ou humide, peut donc être considéré comme un **diélectrique**. Un diélectrique transparent peut être, comme nous l'avons vu, décrit par son indice de réfraction, qui est réel.

9.1.2 Indices de réfraction troposphérique

9.1.2.1 Couche limite

Les modèles d'atmosphère sont bons si l'on ne s'intéresse pas trop à ce qui se passe près du sol. En effet, le rayonnement venant du Soleil provoque un échauffement local de l'air et une évaporation de l'eau disponible. La température et la pression de vapeur sont donc, à proximité du sol, très variables ; **au-delà d'une certaines altitude, qui délimite la couche limite, le comportement de la température est bien plus régulier** ($6°C \cdot km^{-1}$ jusqu'à 10 km), tandis que **celui de la pression partielle de vapeur d'eau est, lui, aléatoire y compris en altitude**. Néanmoins, comme la pression de saturation croît fortement avec la température, la baisse de celle-ci amène la pression partielle de vapeur d'eau à être très faible en altitude. Les couches basses de la troposphère sont donc celles qui poseront problème au regard de la température et de l'humidité.

9.1.2.2 L'indice de réfraction de la troposphère vue comme un mélange

Les indices de réfraction des composants purs de l'atmosphère à la température de $0°C$ et à la pression de 101 325 Pa pour les fréquences radio sont donnés dans le tableau 9.1 page suivante. Les abondances atmosphériques des éléments listés dans ce tableau sont données dans le tableau 8.1 page 117. On peut alors utiliser la théorie de Maxwell-Garnett pour donner une valeur approximative de l'indice de réfraction de l'air sec dans le domaine radio, comme somme des contributions des indices de ses constituants pondérées par leur concentration :

$$\begin{aligned} n_d &= \sum_{i=1}^{N} f_i \, n_i \\ &= 1,000\,314 \end{aligned}$$

valeur assez proche de la valeur tabulée de 1, 000 292. Prenons garde cependant de préciser que la valeur par mélange ainsi obtenue est un modèle grossier, que les développements plus précis présentés plus loin dans ce document rendent inutile.

Diazote	1,000 2941
Dioxygène	1,000 2664
Argon	1,000 281
Dioxyde de carbone	1,000 494
Vapeur d'eau	1,000 0607

Table 9.1 – Indices de réfraction dans le domaine radio des principaux gaz de l'atmosphère terrestre. Source : http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_5/2_5_7.html.

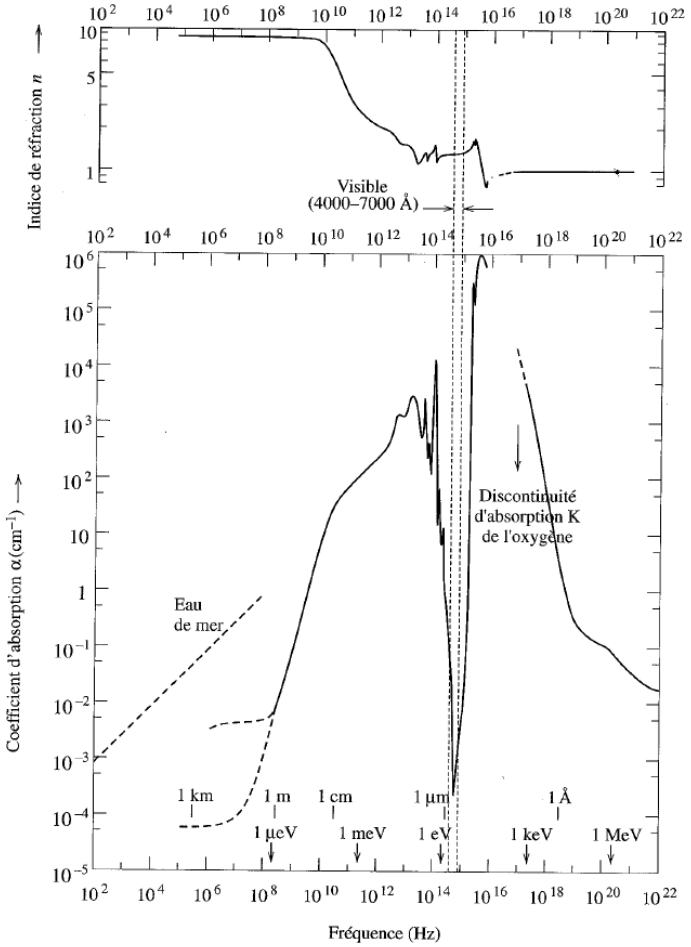


Figure 9.1 – Indice de réfraction et coefficient d'absorption de l'eau liquide selon la fréquence. Source : [Jackson, 2001].

9.1.2.3 Description thermodynamique de l'indice de réfraction troposphérique

a) Réfractivité On note N la **réfractivité**, définie par [Bock, 2001] :

$$N = 10^6 \cdot (n-1)$$

Nous explicitons ici la réfractivité de la troposphère dans différentes gammes de longueur d'onde. Il n'existe en effet pas de modèle unifiant les représentations de cette grandeur sur l'ensemble du spectre. Seules les bandes fréquentielles dans lesquelles l'atmosphère est globalement transparente sont naturellement évoqués.

b) Loi de Gladstone De façon générale, on peut admettre que l'indice de réfraction de l'air dépend de la masse volumique de façon relative selon la **loi de Gladstone**[1] [Levallois, 1969] :

$$\frac{n-1}{\rho} = \frac{n_0-1}{\rho_0}$$

où n_0 est l'indice de l'air de masse volumique ρ_0. On voit ainsi que le rapport entre $n-1$ et ρ est un invariant.

1. John Hall Gladstone, 1827 – 1902.

c) Visible et proche infrarouge Nous présentons ici l'indice de réfraction de l'air à la fois mesuré puis modélisé.

i) Mesures de l'indice de réfraction visible Lorsqu'on mesure l'indice de réfraction de l'air, on observe qu'il varie avec la longueur d'onde à laquelle on le mesure : **ce milieu est donc dispersif dans cette gamme de longueur d'onde**. Nous constatons dans le tableau 9.2 que l'indice de l'air est plus grand dans le rouge que dans le bleu, ce qui signifie que leurs vitesses de propagation n'y sont pas égales, ni n'y suivent la même trajectoire.

λ_0 (nm)	$(n-1)\cdot 10^4$
759,4	2,905
589,6	2,926
518,4	2,940
467,7	2,951
396,9	2,983

Table 9.2 – Variations de l'indice de réfraction de l'air pour les longueurs d'onde visibles, dans les conditions thermodynamiques normales. Source : [Labarthe, 2005].

ii) Modèle de Barrel et Sears (1939) La formule de **Barrel et Sears** donne la réfractivité de groupe de l'air à une température de $0°C$ [Kasser, 1985] :

$$N_g = 287,604 + \frac{4,8864\cdot 10^{-12}}{\lambda^2} + \frac{6,80\cdot 10^{-26}}{\lambda^4}$$

iii) Modèle d'Edlen (1966) Nous présentons ici un exemple de modèle de réfractivité empirique, distinguant les indices de phase et de groupe dans cette partie du spectre, exprimés en fonction de la longueur d'onde. Dans les conditions standard ($T = 15°C$, $P = 1013,25\ hPa$) **le modèle d'Edlen** s'écrit [Kasser, 1985] :

$$\begin{aligned} N_{\varphi,std} &= 83,4213 + \frac{24060,3}{130 - \frac{1\cdot 10^{-12}}{\lambda^2}} + \frac{159,97}{38,9 - \frac{1\cdot 10^{-12}}{\lambda^2}} \\ N_{g,std} &= N_{\varphi,std} + \frac{2\cdot 10^{-12}}{\lambda^2}\left(\frac{24060,3}{\left(130 - \frac{1\cdot 10^{-12}}{\lambda^2}\right)^2} + \frac{159,97}{\left(38,9 - \frac{1\cdot 10^{-12}}{\lambda^2}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

avec la longueur d'onde λ en m.

Pour ces deux grandeurs, notées de façon générique N_{std} désormais, la dépendance avec la pression P, la pression de vapeur saturante e, tous deux en Pa, et la température T, en K, est la suivante [Bosser, 2013] :

$$N = N_{std}\,\frac{P\times 10^{-6}\left(1 + P\left(0,0334 - 9,976\cdot 10^{-5}T\right)\right)}{0,20661(1702,79\,T - 1)} - e\left(4,292\cdot 10^{-4} - \frac{3,428\cdot 10^{-18}}{\lambda^2}\right)$$

La différentiation de cette relation autour des valeurs standard donne :

$$dN = -1,1dT + 2,2\cdot 10^{-3}dP - 3,7\cdot 10^{-4}de$$

On peut ainsi aisément montrer qu'une variation thermique de 1 K a la même amplitude qu'une variation de pression de 5 hPa. On voit aussi que **l'influence de l'humidité, *via* le paramètre de, demeure faible, d'abord par rapport à la pression, mais surtout à la température**.

d) Micro-ondes et radiofréquences Un modèle thermodynamique général de réfractivité dans ce domaine fréquentiel décompose cette grandeur entre une réfractivité de l'air sec (premier terme), et une réfractivité de vapeur d'eau (deuxième et troisième termes) :

$$\begin{aligned} N &\equiv 10^6 \cdot (n-1) \\ &= k_1 R_d \rho_d + k_2 R_w \rho_w + k_3 R_w \frac{\rho_w}{T} \\ &= k_1 \frac{P_d}{T} + k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \end{aligned}$$

avec T est la température, et $k_{i=1;2}$ un coefficient empirique en K/Pa. Les paramètres R_d, R_w sont donnés page 114.

Les termes de la réfractivité reflètent les phénomènes physique à l'œuvre au cours de la traversée de l'air par l'onde électromagnétique [Nahmani, 2012] :
— $k_1 \frac{P_d}{T}$: terme lié au dipôle induit de l'air sec ;
— $k_2 \frac{e}{T}$: terme lié au dipôle induit de l'eau ;
— $k_3 \frac{e}{T^2}$: terme lié au dipôle permanent de l'eau.

i) Modèles de Smith et Weintraub (1953), Boudouris (1963), Thayer (1974) La valeur des termes de cette relation peut varier d'un modèle à l'autre. Ainsi les modèles de **Smith et Weintraub**, **Boudouris**, **Thayer** donnent les coefficients suivants [Bosy & Borkowski, 2005] :

	k_1 $(K \cdot hPa^{-1})$	k_2 $(K \cdot hPa^{-1})$	k_3 $10^5 K \cdot hPa^{-1}$
Smith et Weintraub (1953)	$77,61 \pm 0,01$	72 ± 9	$3,75 \pm 0,03$
Boudouris (1963)	$77,59 \pm 0,08$	72 ± 11	$3,75 \pm 0,03$
Thayer (1974)	$77,60 \pm 0,01$	$64,79 \pm 0,08$	$3,776 \pm 0,004$

La différentiation totale de cette expression avec les valeurs de Thayer fournit l'expression numérique suivante :

$$dN = -1,2\ dT + 2,7 \cdot 10^{-3} dP + 4,5 \cdot 10^{-2} de$$

On constate que la variation de l'indice avec la température et la pression est ainsi relativement similaire à ce qu'elle est dans le domaine visible ; en revanche, **l'influence de l'humidité y est ici de deux ordres de grandeur supérieure**.

ii) Modèle de l'UIT-R **L'Union internationale des télécommunications** recommande d'utiliser le modèle suivant [UIT, 2015]. L'expression de la réfractivité est la suivante :

$$\begin{aligned} N &= 77,6 \frac{P_d}{T} + 72 \frac{e}{T} + 3,75 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2} \\ \iff K_1 &= 77,6\ K \cdot hPa^{-1} \\ k_2 &= 72\ K \cdot hPa^{-1} \\ k_3 &= 3,75\ K^2 \cdot hPa^{-1} \end{aligned}$$

On peut cependant écrire aussi la réfractivité en fonction de la pression totale au lieu de la pression sèche :

$$\begin{aligned} P_d &= P - e \\ \Rightarrow N &= 77,6 \frac{P}{T} - 5,6 \frac{e}{T} + 3,75 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2} \end{aligned}$$

Les pressions sont exprimées en hPa et les températures en K. La pression de vapeur e peut s'exprimer à partir de la pression de vapeur saturante à la température T par la relation (par définition du degré d'humidité RH, en %) :

$$e = \frac{RH \cdot e_s}{100}$$

tandis que la pression de vapeur saturante e_s peut s'écrire :

$$e_s = EF \cdot a \cdot \exp\left(\frac{\left(b - \frac{t}{d}\right) t}{t + c}\right)$$

avec EF une fonction qui dépend de l'état physique de l'eau (liquide ou glace) :

$$\begin{aligned} EF_{water} &= 1 + 10^{-4}\left(7,2 + P\left(0,00320 + 5,9 \cdot 10^{-7} t^2\right)\right) \\ EF_{ice} &= 1 + 10^{-4}\left(2,2 + P\left(0,00382 + 6,4 \cdot 10^{-7} t^2\right)\right) \end{aligned}$$

avec t en $°C$, P en hPa, e_s la pression de vapeur saturante à la température t, avec les coefficients suivants :

	Eau liquide	**Glace**
$a =$	$6,1121$	$6,1115$
$b =$	$18,678$	$23,036$
$c =$	$254,14$	$279,82$
$d =$	$234,5$	$333,7$
Validité	$-40°C \leqslant t \leqslant +50°C$	$-80°C \leqslant t \leqslant 0°C$

On peut par ailleurs exprimer la pression partielle de vapeur d'eau e (en hPa) en fonction de sa masse volumique ρ_w :

$$e = \frac{\rho_w T}{216,7}$$

[UIT, 2013] donne des valeurs typiques de surface de ρ_w et de IWV. ρ_w prend des valeurs qui dépendent de la saison, mais qui peuvent valoir de 0 à 1 $g \cdot m^{-3}$ aux pôles, à 10 $g \cdot m^{-3}$ dans les déserts, 15 à 20 $g \cdot m^{-3}$ en zones tempérées, et jusqu'à 25 $g \cdot m^{-3}$ dans les régions équatoriales (voir figure 9.2 page suivante). Les valeurs cartographiées de contenu intégré en vapeur d'eau sur une colonne d'atmosphère IWV sont celles dépassées pour le pourcentage de temps donné ; par exemple, 5% du temps cette valeur dépasse 10 $kg \cdot m^{-2}$ aux pôles, 20 $kg \cdot m^{-2}$ en zones tempérées mais 50 $kg \cdot m^{-2}$ en zone équatoriale et tropicale (voir figure 9.3 page 136).

[UIT, 2015] se poursuit en donnant un modèle d'évolution verticale de l'indice :

$$n(h) = 1 + N_0 \cdot 10^{-6} \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right)$$

avec N_0 une valeur moyenne globale de réfractivité extrapolée au niveau de la mer, et h_0 un paramètre d'altitude :

$$\begin{aligned} N_0 &= 315 \\ h_0 &= 7,35\ km \end{aligned}$$

9.1.3 Absorption troposphérique

La troposphère est le lieu d'**une absorption différente des rayonnements selon leur longueur d'onde**. Une illustration spectaculaire de ce phénomène est le Soleil couchant qui nous apparaît rouge, car la lumière qui nous en parvient a traversé une épaisseur d'atmosphère importante, et que le rouge est beaucoup moins absorbé que le bleu (voir le tableau 9.3 page suivante) ; l'énergie du bleu, plus absorbé, n'est cependant pas stockée par les molécules de l'atmosphère, mais provoque l'oscillation de ses molécules, sous forme de diffusion en régime de Rayleigh.

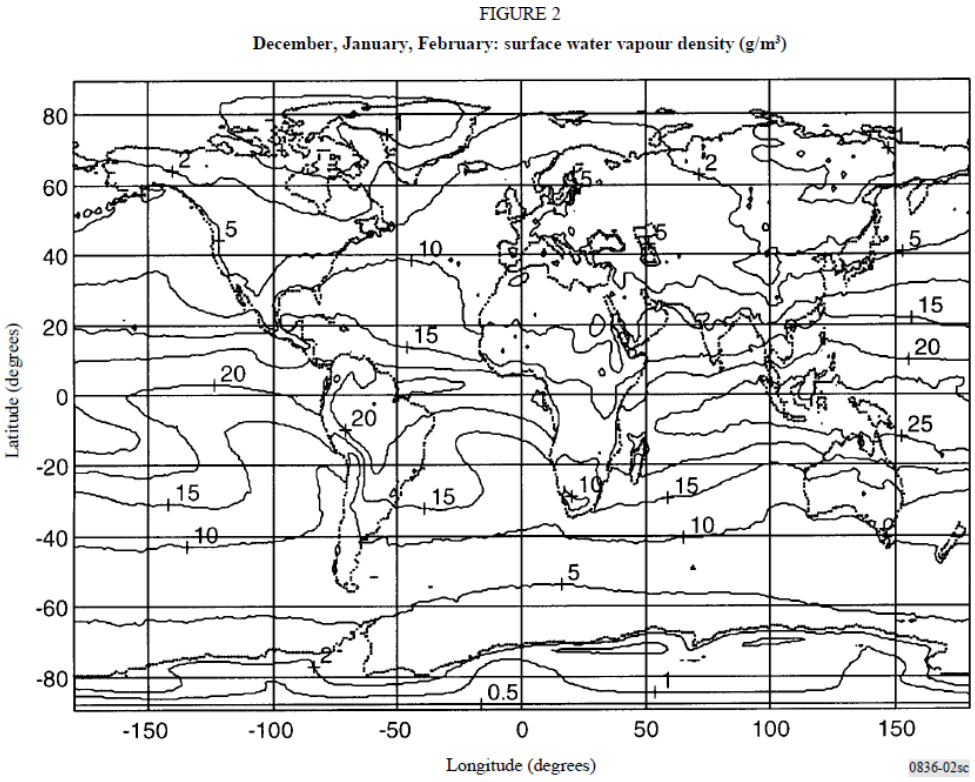


Figure 9.2 – **Densité de vapeur à la surface de la Terre en décembre, janvier, février. Source : [UIT, 2013].**

λ_0 (nm)	α (m^{-1})
400	$4,0 \cdot 10^{-5}$
550	$1,1 \cdot 10^{-5}$
800	$0,25 \cdot 10^{-5}$

Table 9.3 – **Variations du coefficient d'atténuation de l'air pour les longueurs d'onde visibles, dans les conditions thermodynamiques normales. Source : [Labarthe, 2005].**

9.1.4 Diffusion troposphérique

Le rayonnement absorbé par la troposphère contribue à l'agitation thermique des molécules et particules de l'atmosphère, mais participe aussi de la diffusion des rayonnement dans la troposphère.

9.1.4.1 Diffusion moléculaire

La diffusion moléculaire est régie par le **modèle de Rayleigh** de la diffusion (voir page 96).

a) Coefficient de diffusion Une approximation de l'expression du **coefficient de diffusion moléculaire dans le visible** est, à $T_0 = 288,15\ K$ et $P_0 = 1013,25\ hPa$ [Bosser, 2013] :

$$Q_s^m(\lambda) \quad = \quad 9,87 \cdot 10^{-31}\ \frac{1}{\lambda^4}$$

b) Épaisseur optique Dans le cas moléculaire, on approxime aussi l'**épaisseur optique** vue page 105 par [Bosser, 2013] :

$$\tau_s^m(\lambda) \quad = \quad 2,732 \cdot 10^{-27}\ \lambda^{-4,083}\ \frac{P}{P_0}$$

où P est la pression au sol, P_0 la pression standard (en hPa) et λ la longueur d'onde en m.

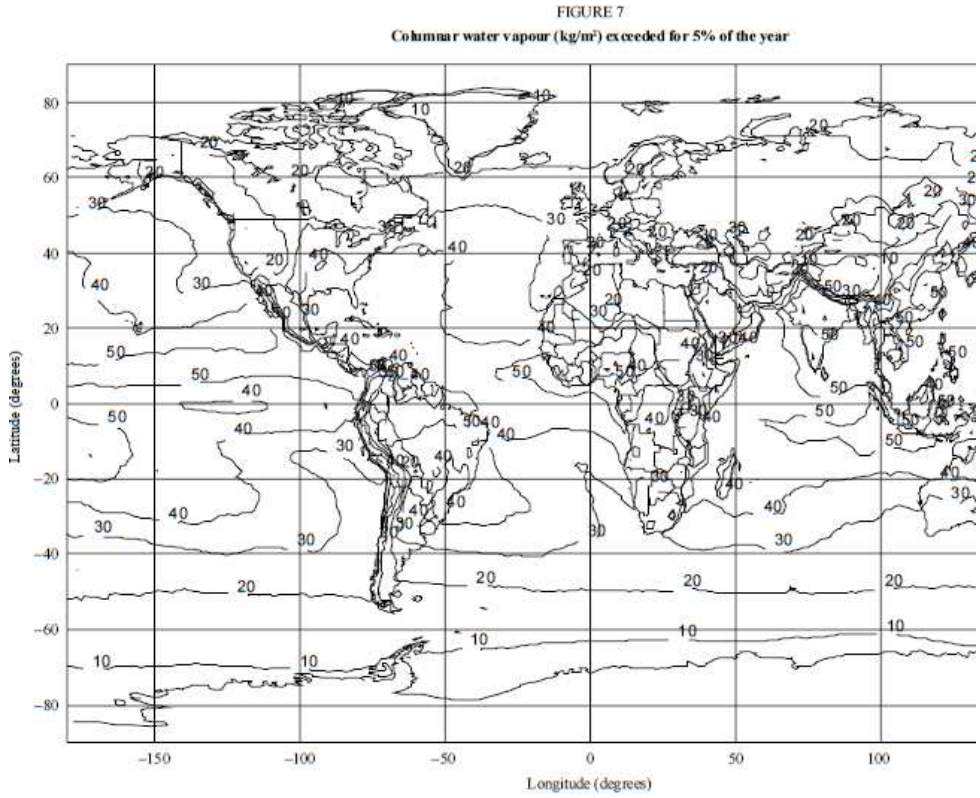


Figure 9.3 – Contenu intégré de vapeur d'eau dépassé 5% du temps sur une année. Source : [UIT, 2013].

9.1.4.2 Diffusion particulaire

Le **modèle de Mie** de la diffusion régit la diffusion particulaire (voir page page 103).

a) Coefficient de diffusion Dans le même domaine visible, mais en raison de la **diffusion particulaire**, on peut exprimer, au sol ($z = 0$) [Bosser, 2013] :

$$Q^p_{s,0}(\lambda, V) \quad = \quad \frac{3,912}{V}\left(\frac{0,555 \cdot 10^{-6}}{\lambda}\right)^{0,0599 \cdot V^{0,33}} \qquad [km^{-1}]$$

avec λ en m et V la visibilité météorologique, en km, qui est la distance verticale à partir de laquelle, à la longueur d'onde de 555 nm, l'éclairement tombe à 2% de sa valeur initiale. V varie classiquement de 2 m, en cas de brume épaisse, à 30 km, par temps très clair.

Il existe dans ce cas une **dépendance en altitude**, dont une expression approchée est :

$$Q^p_s(z, \lambda, V) \quad = \quad Q^p_{s,0}(\lambda, V) \cdot e^{-\frac{z}{h(V)}}$$

avec $h(V)$ la fonction de visibilité.

b) Fonction de visibilité La fonction $h(V)$ est un facteur d'échelle dépendant de la **visibilité au sol** [Bosser, 2013] :

$$\begin{aligned} h(V) &= 10^{-3}\,(a + b\ \ln(V)) \\ \text{avec :}\quad a &\approx 672,9\ m \\ b &\approx 207,5\ m \end{aligned}$$

et V exprimée en km.

c) Épaisseur optique On fera observer que, dans le cas particulaire (voire moléculaire pour les petites particules), l'**épaisseur optique** sera calculée par [Bosser, 2013] :

$$\begin{aligned}\tau_s^p &= \int_0^\infty Q_s^p(z,\lambda,V)dz \\ &= Q_{s,0}^p(\lambda,V)\int_0^\infty e^{-\frac{z}{h(V)}}dz \\ &= Q_{s,0}^p(\lambda,V)\times\left[-ae^{-\frac{z}{h(V)}}\right]_0^\infty \\ &= Q_{s,0}^p(\lambda,V)\times h(V)\end{aligned}$$

relation qui démontre l'intérêt d'avoir présenté les grandeurs $Q_{s,0}^p(\lambda,V)$ et $h(V)$ précédemment.

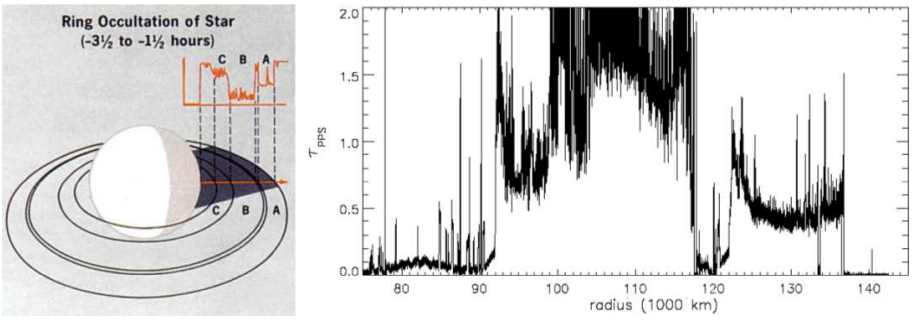


Figure 9.4 – À gauche : géométrie d'observation de l'occultation de l'étoile δ *Scorpi* observée avec PPS et UVS de la sonde *Voyager 2*. Le signal mesuré représente la brillance de l'étoile atténuée par les anneaux, qui est inversement proportionnelle à la profondeur optique des anneaux. À droite : profil radial PPS de la profondeur optique des anneaux obtenu avec l'occultation stellaire δ *Scorpi*. Source : [Déau, 2007]. Précisons que la technique des occultations stellaires est souvent utilisée pour sonder les atmosphères et les anneaux des corps du système solaire ; c'est cette technique qui a permis à André Brahic de découvrir les arcs d'anneaux Liberté, Égalité, Fraternité autour de Neptune, depuis l'observatoire de La Silla au Chili.

9.1.4.3 Réflectivité de l'atmosphère

Au premier ordre, la réflectivité apparente de l'atmosphère peut s'écrire, pour un angle d'incidence du rayonnement θ_S et un angle de rétro-diffusion θ_v [Bock, 2001] :

$$\begin{aligned}\rho_a(\theta_S,\theta_v) &= \frac{\tau^d P(\xi)}{\cos\theta_S\cos\theta_v} \\ \text{avec :}\quad \tau^d P(\xi) &= \tau^m P_m(\xi)+\tau^p P_p(\xi)\end{aligned}$$

l'effet combiné des molécules et des particules, P étant la fonction de phase et ξ l'angle de diffusion.

9.1.4.4 Coefficient de transmission

On peut montrer que le **coefficient de transmission** T du rayonnement traversant l'atmosphère sous un angle θ s'écrit [Bock, 2001] :

$$\begin{aligned}T &= \exp\left(-\frac{\tau^m+\tau^p}{\cos\theta}\right) \\ &\approx \frac{1}{1+\frac{b\tau^d}{\cos\theta}} \\ \text{avec :}\quad b\tau^d &= b^m\tau^m+b^p\tau^p \\ b^m &= 0,5 \\ b^p &= 0,16\end{aligned}$$

b^m et b^p étant les coefficients de rétrodiffusion des molécules et particules.

9.1.4.5 Albédo sphérique

L'albédo sphérique peut être approximé par [Bock, 2001] :

$$s \approx \frac{2b\tau^d}{1+2b\tau^d}$$

9.2 Propagation ionosphérique

9.2.1 Transparence de l'ionosphère

Nous rappelons qu'un milieu ionisé est caractérisé par une fréquence de plasma, qui dépend uniquement de la densité électronique :

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

À chaque valeur de N_e, donc à chaque altitude, il en existe une. Elle atteint un maximum, appelé fréquence critique f_E, à l'endroit du maximum de densité électronique. Ainsi en effectuant un sondage en émettant des ondes électromagnétiques de fréquence croissante, on assiste à :

— une réflexion de l'onde à une altitude inférieure à celle du maximum tant que $f < f_E$;
— une réflexion au niveau du maximum pour $f = f_E$;
— une transmission si $f > f_E$.

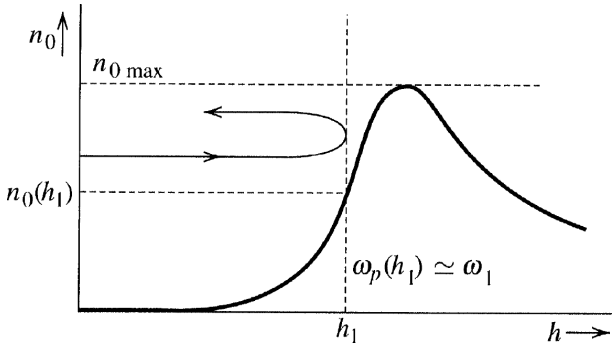


Figure 9.5 – Densité électronique selon l'altitude dans l'ionosphère. Source : [Jackson, 2001].

On peut ainsi tracer des ionogrammes par mesure du temps d'aller-retour d'une onde dont on fixe la fréquence. L'encadrement de la pulsation de Langmuir par une pulsation d'onde réfléchie par l'ionosphère (correspondant à une longueur d'onde $\lambda_2 = 1\ km$), constatée expérimentalement comme telle, et par une pulsation d'onde transmise (correspondant à une fréquence $f_1 = 100\ MHz$) permet d'évaluer la densité volumique d'électrons de l'ionosphère :

$$\begin{aligned} 0 < \omega_2 < \quad & \omega_p & < \omega_1 \\ \iff \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_2^2} < \quad & \frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0} & < 4\pi^2 f_1^2 \\ \iff \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_2^2}\frac{m_e\epsilon_0}{e^2} < \quad & N_e & < \frac{4\pi^2 m_e \epsilon_0}{e^2} f_1^2 \end{aligned}$$

Avec les ordres de grandeurs proposés, on trouve :

$$1,1 \cdot 10^9 m^{-3} < \quad N_e \quad < 1,2 \cdot 10^{14} m^{-3}$$

ce qui en fait un milieu bien moins dense que la basse atmosphère, où l'on a : $N \sim 10^{25}\ m^{-3}$. Cela permet en outre de donner une limite supérieure expérimentale à la fréquence de Langmuir :

$$\omega_p \quad < \quad 9,8 \cdot 10^7\ Hz$$

Cette limite supérieure est de l'ordre de la centaine de MHz.

9.2.2 Indice de réfraction

La **pulsation de plasma** est, rappelons-le :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$\begin{aligned} v_\phi &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \\ v_g &= c\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \end{aligned}$$

L'indice de réfraction de phase est par définition :

$$\begin{aligned} n_\phi &= \frac{c}{v_\phi} \\ &= \sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \\ &= (1-X)^{1/2} \end{aligned}$$

en ayant posé $X = \omega_c^2/\omega^2$. Là nous utilisons un développement limité bien connu :

$$(1+Y)^\alpha = 1 + \alpha Y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}Y^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}Y^n + o(x^n)$$

C'est-à-dire qu'en prenant $\alpha = 1/2$ et $X = -Y$, nous avons, en nous limitant à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} n_\phi &\simeq 1 - \frac{1}{2}X + \cdots \\ &= 1 - \frac{\omega_c^2}{2\,\omega^2} \\ &= 1 - \frac{N_e\, e^2}{2\,\epsilon_0\, m_e\, \omega^2} \end{aligned}$$

soit, en exprimant le résultat en fonction de la fréquence (car $\omega = 2\pi f$) et en faisant l'application numérique :

$$n_\phi = 1 - 40,3\,\frac{N_e}{f^2}$$

De façon similaire, en utilisant le même développement limité mais avec $\alpha = -1/2$ on trouve pour l'indice de groupe :

$$\begin{aligned} n_g &= 1 + \frac{N_e\, e^2}{2\,\epsilon_0\, m_e\, \omega^2} \\ &= 1 + 40,3\,\frac{N_e}{f^2} \end{aligned}$$

L'indice de phase étant inférieur à l'indice de groupe, on retrouve que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de groupe.

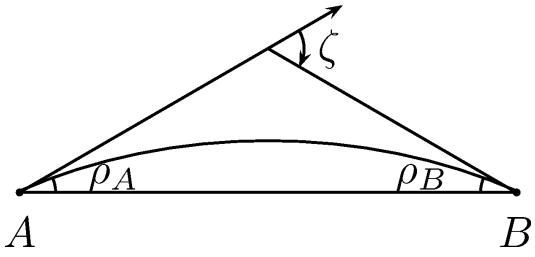


Figure 9.6 – Angles associés à l'observation de rayons lumineux courbés. Figure inspirée de [Levallois, 1969].

9.3 Courbure de la trajectoire des ondes électromagnétiques

9.3.1 Relations générales

9.3.1.1 Relations de Dufour

Soit un rayon lumineux allant de A à B par une trajectoire courbe. Nous notons ρ_A et ρ_B les angles entre la corde liant ces deux points d'une part et les tangentes à la trajectoire lumineuse en chacun de ces points d'autre part ; nous notons $\zeta = \rho_A + \rho_B$ l'angle entre les deux tangentes (voir figure 9.6). Afin d'exprimer les deux angles ρ_A et ρ_B, considérons un point M formant avec A et B un triangle peu éloigné du triangle plat. Nous notons B' le projeté de B sur la droite (AM), $d\alpha = \widehat{BAM}$ et $d\beta = \widehat{BMB'}$ (voir figure 9.7).

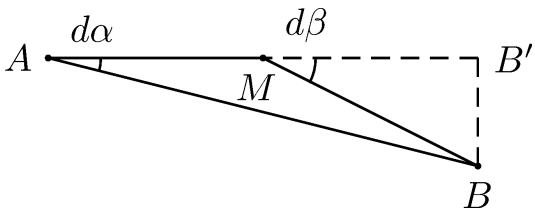


Figure 9.7 – Évolution élémentaire des angles associés à l'observation de rayons lumineux courbés. Figure inspirée de [Levallois, 1969].

Si nous banalisons M et en multiplions le nombre tout en considérant la courbe comme très aplatie, nous avons [Levallois, 1969] :

$$d\alpha = \frac{1}{AB}\sum_i M_i B'_i d\beta_i$$

Or, localement, si nous notons Γ la courbure de la trajectoire (égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur), alors l'angle $d\beta$ s'écrit :

$$d\beta = \Gamma ds$$

où ds est l'élément d'abscisse curviligne local de la trajectoire. On peut du reste préciser ce résultat évident :

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \rho_A + \rho_B \\ &= \int_A^B d\beta \\ &= \int_A^B \Gamma ds \end{aligned}$$

Comme la courbe est très aplatie, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} AB &= S && \text{notation} \\ AM &= s && \text{abscisse curviligne mesurée le long de la trajectoire depuis } A \\ \Rightarrow MB &= S - s \end{aligned}$$

La somme vue précédemment peut donc être passée du discret au continu, et on peut écrire les **relations de Dufour** :

$$\begin{aligned}\rho_A &= \frac{1}{S}\int_A^B (S-s)\Gamma ds \\ \rho_B &= \frac{1}{S}\int_A^B s\Gamma ds\end{aligned}$$

9.3.1.2 Lois de Descartes dans un milieu continu

Considérons désormais deux milieux séparés par un dioptre localement plan, d'indices infiniment proches n_1 et $n_2 = n_1 + dn$; les angles du rayon lumineux avec la normale au dioptre sont i_1 et $i_2 = i_1 + di$. Le dioptre est une surface d'indice uniforme. La loi de Descartes relative à la réfraction donne [Levallois, 1969] :

$$n\sin i = (n+dn)\sin(i+di)$$

Nous pouvons aussi différencier la relation :

$$\begin{aligned} n\sin i &= cte \\ \Rightarrow dn\sin i + n\,di\cos i &= 0 \\ \iff \frac{dn}{n} &= -\cot i\,di \\ \iff di &\equiv d\zeta \\ &= -\frac{dn}{n}\tan i\end{aligned}$$

L'angle de déviation totale s'écrit donc :

$$\zeta = -\int_A^B \frac{dn}{n}\tan i$$

Soient M le point intersection du dioptre et de sa normale, M' un point de la trajectoire du rayon lumineux, K son projeté sur la normale et H son projeté sur le dioptre (voir figure 9.8 page suivante), tels que :

$$\begin{aligned} HM' &= MK \\ &= dh \\ KM' &= MH \\ &= d\sigma \\ MM' &= ds\end{aligned}$$

Nous avons alors immédiatement :

$$\begin{aligned}\tan i &= \frac{d\sigma}{dh} \\ dS &= \frac{d\sigma}{\sin i}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d\zeta &\equiv \Gamma ds \\ &= \Gamma\frac{d\sigma}{\sin i}\end{aligned}$$

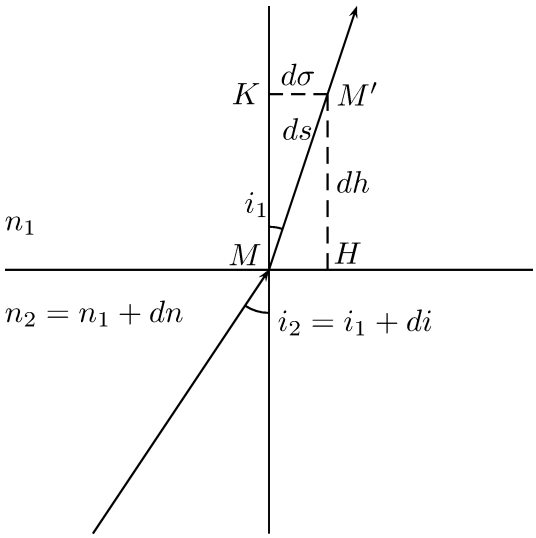


Figure 9.8 – Paramétrage des lois de Descartes dans un milieu continu. Figure inspirée de [Levallois, 1969].

D'où finalement **l'expression de la courbure du rayon lumineux en fonction de la dérivée de l'indice de réfraction par rapport à la direction normale au dioptre**, c'est-à-dire la surface de séparation des indices :

$$\Gamma = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dh}\sin i$$

On retrouve le résultat qualitatif vu avec l'équation de l'eikonale et du principe de Fermat : la courbure du rayon est dirigée vers le gradient d'indice. Si, par exemple, $i = \pi/2$, le rayon lumineux est tangent au dioptre ; sa courbure est donc :

$$\Gamma\left(i = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dh}$$

Si bien que :

$$\Gamma(i) = \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin i$$

À l'inverse, on retrouve un résultat très général de l'optique géométrique : un rayon lumineux normal au dioptre ($i = 0$) n'est pas dévié ; autrement dit, sa courbure est nulle.

Repartons de la relation générale ; l'angle élémentaire de déviation angulaire s'écrit :

$$\begin{aligned} d\zeta &\equiv \Gamma ds \\ &= \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin i ds \\ &= \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) d\sigma \end{aligned}$$

9.3.1.3 Loi de Bouguer

On postule **une atmosphère à géométrie sphérique** ; les surfaces d'égal indice sont assimilables à des sphères concentriques. La trajectoire du rayon lumineux est donc plane et contient la verticale. Soit un trajet optique allant de A, situé à un rayon r_A du centre de la Terre O et où l'indice est n_A, à B (r_B, n_B, respectivement). La verticale fait en A un angle i_A avec la surface d'indice n_A et, en B, la verticale fait un angle i_B avec la surface d'indice n_B.

Si l'on fait subir à cette trajectoire une rotation de centre O et d'angle $d\theta$, alors A est transformé en A', situé à r_A de O et où l'indice est toujours n_A ; de même, B est transformé en B' (r_B, n_B, respectivement). Nous considérons désormais le point A'', projeté de A sur le rayon $A'B'$; AA'' est donc orthogonal aux

rayons lumineux AB et $A'B'$, et A'' est sur la même surface d'onde que A. De même, B'' est le projeté de B sur $A'B'$; BB'' est orthogonal aux rayons lumineux AB et $A'B'$, et B'' est sur la même surface d'onde que B (voir figure 9.9).

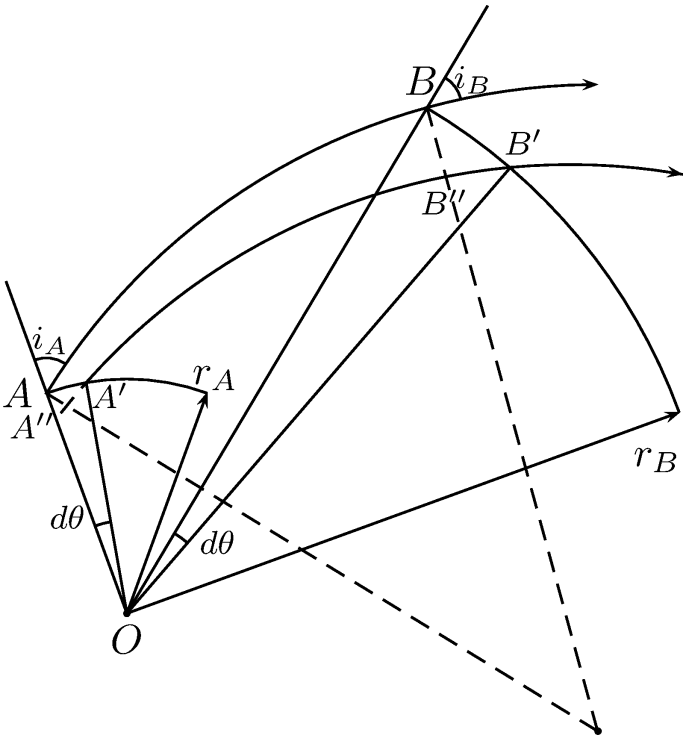


Figure 9.9 – Paramétrage des rayons lumineux courbés dans le cas d'une atmosphère sphérique pour la démonstration de la loi d'invariance de Bouguer. Figure inspirée de [Levallois, 1969].

Par construction, nous avons l'égalité suivante des chemins optiques [Levallois, 1969] :

$$\int_A^B nds = \int_{A'}^{B'} nds$$

car, en effet, A et A' sont sur des surfaces de même indice, d'une part, tout comme B et B' d'autre part. Or, en vertu du principe d'Huygens, nous avons également celle-ci :

$$\int_A^B nds = \int_{A''}^{B''} nds$$

car, en effet, A et A'' sont sur la même surface d'onde, d'une part, tout comme B et B'' d'autre part.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{A'}^{B'} nds &= \int_{A''}^{B''} nds \\ \iff \int_{A'}^{B''} nds + \int_{B''}^{B'} nds &= \int_{A''}^{A'} nds + \int_{A'}^{B''} nds \\ \iff \int_{B''}^{B'} nds &= \int_{A''}^{A'} nds \\ \Rightarrow n_B B''B' &= n_A A''A' \end{aligned}$$

Or par construction des projections :

$$\begin{aligned} A'A'' &= AA' \sin i_A \\ &= r_A d\theta \sin i_A \\ \text{et :} \quad B'B'' &= BB' \sin i_B \\ &= r_B d\theta \sin i_B \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement la **loi d'invariance de Bouguer**[2] :

$$\begin{aligned} n_A r_A \sin i_A &= n_B r_B \sin i_B \\ nr \sin i &= cte \end{aligned}$$

9.3.1.4 Formulation générale dans une atmosphère à géométrie sphérique

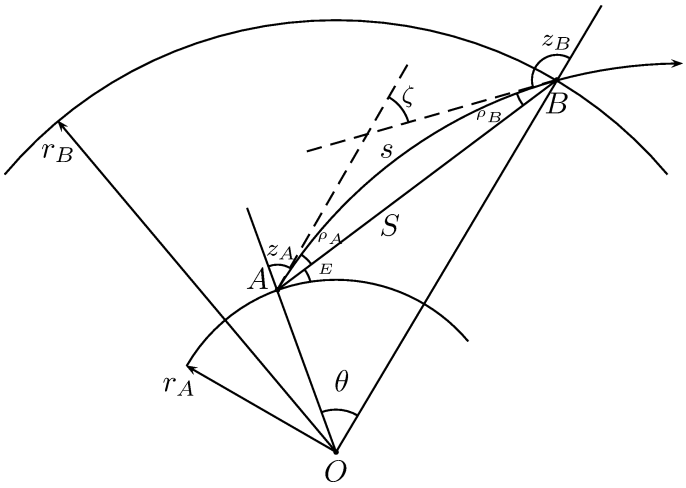


Figure 9.10 – Paramétrage général pour l'atmosphère à géométrie sphérique. Figure inspirée de [Bosser, 2013].

En utilisant un système de coordonnées polaires centrées sur le centre de la Terre (voir figure 9.10), pour lequel nous notons désormais de façon explicite z les angles avec les verticales locales (faisant ainsi référence à l'angle zénithale) et en utilisant la loi de Bouguer, on peut écrire [Bosser, 2013] :

$$\begin{aligned} s \sin z_A &= r \frac{d\theta}{ds} \\ \iff r_A n \sin z_A &= r_A n \frac{r_A \, d\theta}{ds} \\ \text{Or :} \quad ds &= \sqrt{dr_A^2 + r_A^2 d\theta^2} \\ \text{Donc :} \quad ds &= \frac{r_A n \, dr_A}{\sqrt{n^2 r_A^2 (1 - \sin^2 z_A)}} \end{aligned}$$

Cette écriture, redondante et que l'on pourrait simplifier, sera utile pour la suite. Si on pose :

$$\begin{aligned} x &= rn \\ a &= x \sin z \\ \text{alors :} \quad L &= \int_{x_A}^{x_B} \frac{(1 - xm')d \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \text{avec :} \quad m' &= \frac{d \ln n}{dx} \end{aligned}$$

En introduisant le rayon de courbure R_c du rayon, on définit **l'angle de réfraction astronomique** :

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \int_A^B \frac{ds}{R_c} \\ &= -a \int_{x_A}^{x_B} \frac{m' dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

On en déduit les grandeurs suivantes :

2. Pierre Bouguer, 1698 – 1758.

$$
\begin{aligned}
\theta &= z_A - \arcsin\left(\frac{a}{r_B}\right) + \zeta \qquad \text{l'angle au centre} \\
E &= \arctan\left(\frac{r_B\cos\theta - r_A}{r_B\sin\theta}\right) \qquad \text{l'élévation du trajet direct} \\
S &= \sqrt{r_B^2 + r_A^2 - 2r_A r_B\cos\theta} \qquad \text{la longueur du trajet direct} \\
&= -r_A\sin E + \sqrt{r_B^2 - r_A^2\cos^2 E}
\end{aligned}
$$

9.3.2 Quelques cas pratiques

Selon les applications, les grandeurs à exprimer et dont il faut tenir compte peuvent varier, telles les **observations astronomiques ou terrestres**.

9.3.2.1 Observations astronomiques

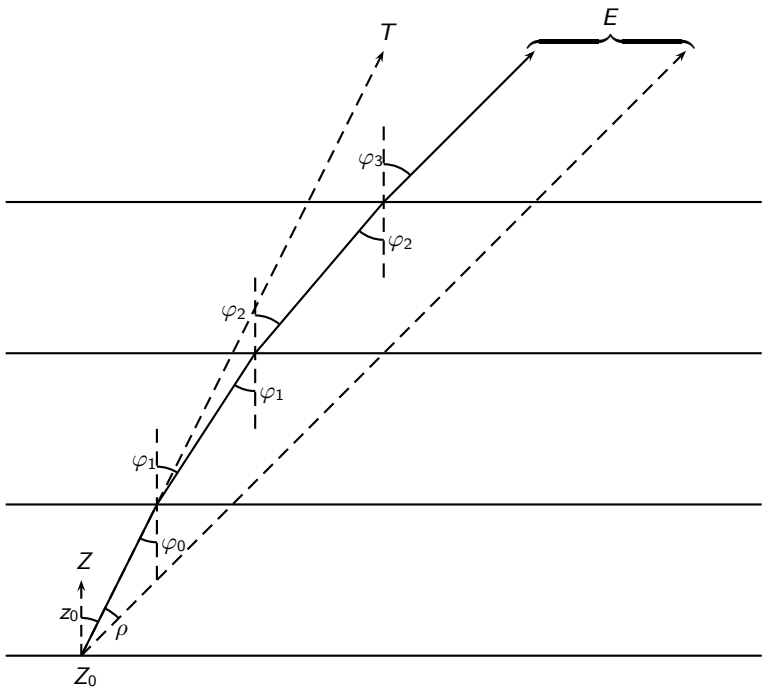


Figure 9.11 – L'effet de la réfraction atmosphérique sur les rayons lumineux : T est la direction visée, et E la direction réelle.

Ici, on découpe l'atmosphère en une infinité de petites couches i, d'indices n_i ; nous notons φ_i l'angle entre le rayon lumineux et la normale à l'interface supérieure de la couche i, z_0 la distance zénithale du rayon lumineux observé au sol (donc de la couche 0), et ρ la déviation, observée aussi au sol, due à la réfraction. La relation de Snell-Descartes s'écrit :

$$\forall i \geqslant 0 \qquad n_{i+1}\sin\varphi_{i+1} = n_i\sin\varphi_i$$

Cette relation est vraie depuis le vide ($n = 1$ et $\varphi = z$) jusqu'au sol ($n = n_0$ et $\varphi = z_0$). On a donc :

$$
\begin{aligned}
n_0\sin z_0 &= \sin z \\
&= \sin(z_0 + \rho) \\
&= \sin z_0\cos\rho + \sin\rho\cos z_0
\end{aligned}
$$

Si on fait l'hypothèse que ρ est petit, alors :

$$\begin{aligned} \sin\rho \approx \rho \qquad & \text{et} \qquad \cos\rho \approx 1 \\ \Rightarrow \rho &= (n_0 - 1)\tan z_0 \end{aligned}$$

Au sol, l'indice de réfraction valant environ $n_0 = 1,000293$ sous $T_0 = 0^\circ C$, on arrive à :

$$\begin{aligned} \rho_{0[rad]} &= 2,93 \cdot 10^{-4} \tan z_0 \\ \text{et} \quad \rho_{0['']} &= 60,236 \tan z_0 \end{aligned}$$

Une analyse plus approfondie, mais aussi plus complexe[3], montre que cette relation n'est vraie que pour les petites distances zénithales (jusqu'à 30 ou 35°) ; au delà, la relation suivante est à utiliser :

$$\rho_{0['']} = 60,236 \tan z_0 - 0,0675 \tan^3 z_0$$

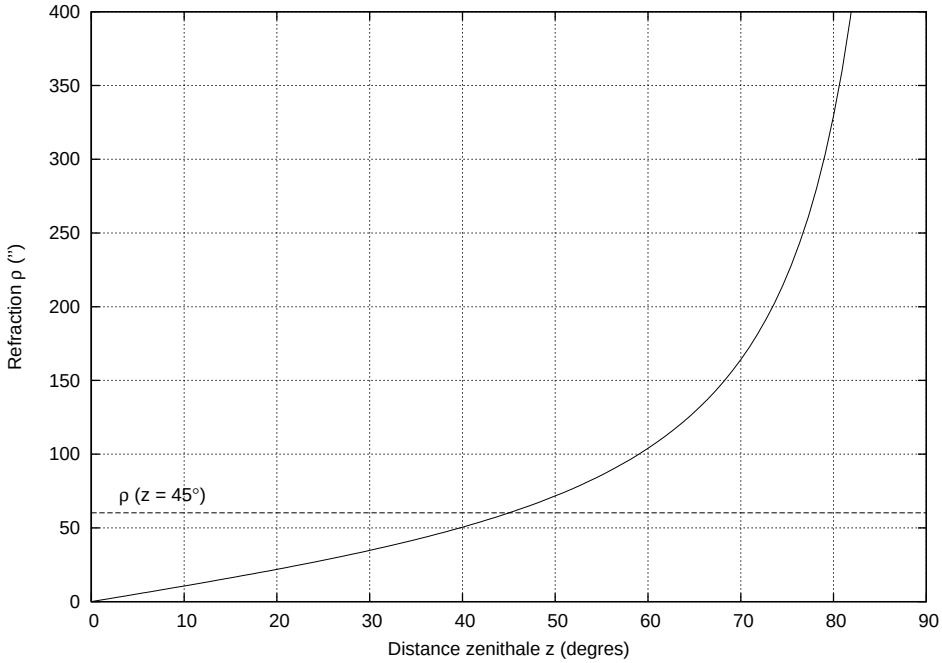


Figure 9.12 – Angle de réfraction en fonction de la distance zénithale.

On peut montrer que dans des conditions quelconques, notamment de température, on peut avoir [Bosser, 2013] :

$$\rho(T) = \rho_0 \frac{n(T) - 1}{n_0 - 1}$$

L'enjeu est donc de déterminer la loi $n(T)$.

9.3.2.2 Observations terrestres

Lorsqu'on réalise des observations dans l'atmosphère, donc là où les points de départ et d'arrivée du rayon lumineux sont dans l'atmosphère, on constate aussi une courbure des rayons. C'est notamment le cas en nivellement trigonométrique, lorsqu'on met en pratique la technique dite des « zénithales réciproques simultanées » (voir figure 9.13 page 150).

3. On peut la trouver dans [Levallois, 1969].

a) Considérations expérimentales générales Soient deux points A et B, séparés d'un angle θ mesuré au centre de la Terre, s'observant mutuellement avec des distances zénithales z_A et z_B respectivement (voir figure page 150). Si on considère que la trajectoire du rayon lumineux est plane, alors les deux tangentes à la trajectoire en A et B s'intersectent en M et y font un angle ζ. Dans le quadrilatère $OAMB$, la somme des angles étant égales à 2π [Levallois, 1969] :

$$\begin{aligned} 2\pi &= \theta + (\pi - z_A) + (\pi - \zeta) + (\pi - z_B) \\ \iff \zeta &= \pi + \theta - (z_A + z_B) \end{aligned}$$

Or, comme $\zeta = \rho_A + \rho_B$, les mesures de z_A et z_B permettent d'étudier cette somme, caractéristique de la réfraction et, en particulier, son évolution dans le temps. [Levallois, 1969] explique qu'elle est maximum de nuit, qu'elle décroît vers le lever du jour, atteint un minimum vers 10 heures solaires jusqu'à 15 heures, puis qu'elle ré-augmente. Ce schéma varie naturellement d'une saison à l'autre ainsi que de la distance de visée et du terrain survolé par les observations et, bien entendu, des évolutions météorologiques. Ainsi, en dépit de l'agitation thermique importante à ces heures, **c'est, en moyenne, entre 10 et 15 heures solaires locales que les observations zénithales subissent une réfraction stable et minimale**.

Il est à noter enfin qu'on peut avoir affaire non seulement à de la réfraction verticale comme déjà vu, mais aussi à de la réfraction horizontale. On peut montrer que la courbure Γ est alors proportionnelle au gradient horizontal de température ; à titre indicatif, un tel gradient de 1 $K \cdot km^{-1}$ pour $T = 288\ K$ entraîne un Γ de l'ordre de $0,6'' \cdot km^{-1}$.

b) Coefficient de réfraction On appelle **coefficient de réfraction** le rapport entre le rayon terrestre $R_\oplus$ et le rayon de courbure du rayon lumineux R_c [Levallois, 1969] :

$$k = \frac{R_\oplus}{R_c}$$

Ce coefficient est une grandeur algébrique, et le signe de R_c est positif quand la courbure du rayon lumineux est dirigée vers le bas, négatif vers le haut. La trajectoire du rayon étant supposée être un arc de cercle de rayon R_c, de longueur s, l'angle de réfraction ρ est :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{s}{2R_c} \\ &= \frac{ks}{2R_\oplus} \end{aligned}$$

En géodésie terrestre, on a $n \approx 1$ et $i \approx 90°$, et [Bosser, 2013] :

$$k = -R_\oplus \frac{dn}{dh}$$

Lorsqu'un point A, d'altitude h_A, observe un point B, d'altitude $h_B > h_A$, cette relation se réécrit [Kasser, 2008] :

$$k = R_\oplus \frac{n_A - n_B}{h_A - h_B}$$

avec n_A l'indice de réfraction à l'altitude h_A, et n_B celui à h_B.

On peut aussi exprimer k par des mesures thermodynamiques :

$$k = 0,670 \left(-34,15 - \frac{dT}{dh}\right) \frac{P}{T^2}$$

Les études expérimentales montrent que le facteur prépondérant d'erreur entre les valeurs calculées du coefficient de réfraction et celles mesurées tient essentiellement dans le gradient de température. Ceci est particulièrement vrai pour les observations rasantes à proximité du sol. Ainsi, le comportement de la

courbure dépend fortement de l'altitude. Dans la couche limite, donc à proximité du sol, les forts gradients thermiques dominent la courbure, qui est forte et aléatoire ; la courbure peut ainsi être dirigée « vers le ciel ». Au-delà de la couche limite, le gradient de pression domine la courbure, si bien que la courbure des rayons lumineux est généralement dirigée vers le bas. Des valeurs typiques de k, en haute atmosphère, sont $0,12$ dans le domaine visible, et $0,25$ dans le domaine radio [Kasser, 2008], c'est-à-dire un rayon de courbure du rayon lumineux très élevé, autrement dit une trajectoire peu courbée ; à l'inverse, à proximité du sol, le coefficient de courbure peut atteindre des valeurs élevées, jusqu'à 3 en valeur absolue par exemple, c'est-à-dire une trajectoire lumineuse très courbée et un rayon de courbure faible, sans compter la variation de signe, et donc celle de l'orientation de la courbure.

c) Zénithales réciproques simultanées En 1938, Biot publia deux mémoires *« Sur l'emploi des distances zénithales réciproques et simultanées pour déterminer les erreurs de réfraction »* et *« Sur la mesure théorique et expérimentale de la réfraction terrestre »* [Levallois, 1969]. De nos jours, dans le cas d'**observations zénithales réciproques simultanées**, deux points A et B s'observent simultanément, et déduisent de leurs observations de distance zénithale et de leur mesure de distance le coefficient de réfraction. Les conditions thermodynamiques proches dans lesquelles ils s'observent amènent à :

$$\begin{aligned} \rho_A &\approx \rho_B \\ \iff \rho &= \frac{\pi - (z_A + z_B) + \theta}{2} \\ \Rightarrow k &= 1 + \frac{R_\oplus}{s}\left(\pi - (z_A + z_B)\right) \end{aligned}$$

L'erreur verticale induite par l'observation d'un tel rayon lumineux est :

$$\begin{aligned} \Delta h &= \rho s \\ &= \frac{k s^2}{2R_\oplus} \end{aligned}$$

Cette quantification permet de propager proprement une altitude par observations zénithales.

d) Mesures de distances Les ondes radio peuvent être utilisées pour mesurer des distances précises entre deux observateurs. Courbée, la trajectoire de l'onde électromagnétique a une longueur plus longue que la distance géométrique S. On peut montrer que la **correction à soustraire à la distance** mesurée s'exprime [Levallois, 1969] :

$$C = \frac{(1-k)^2}{24R_\oplus^2} S^3$$

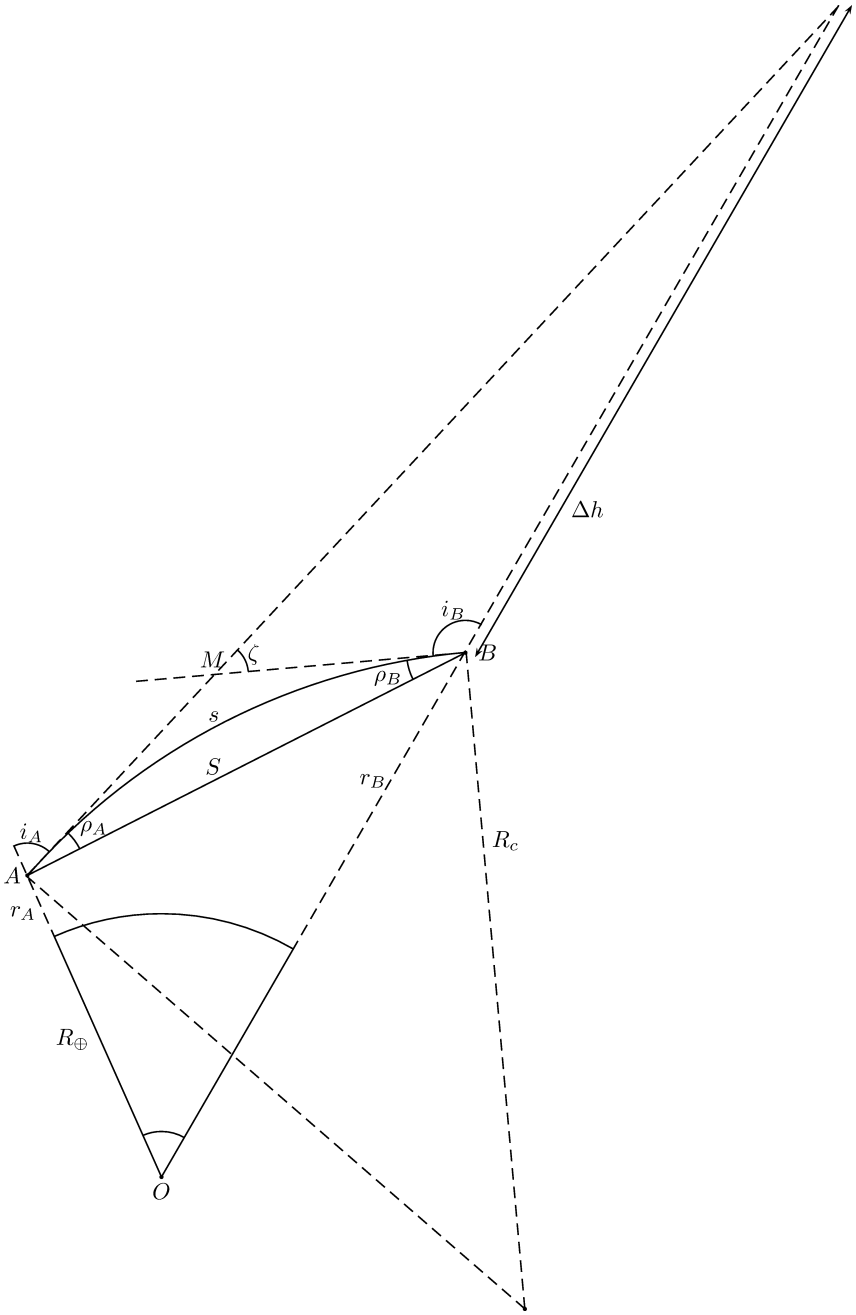


Figure 9.13 – **Géométrie de la courbure du rayon lumineux dans le cas d'observations zénithales réciproques simultanées. Plusieurs simplifications sont à noter : R_c est en général bien plus grand que $R_\oplus$ et que représenté sur cette figure ; de plus, r_A et r_B sont aussi, en général, bien moins différents que représentés ici ; enfin, l'angle θ entre A et B mesuré au centre de la Terre est aussi bien plus faible qu'ici. L'ensemble de ces simplifications de représentation entraînent que l'erreur sur la détermination d'altitude Δh est ici très exagérée ; de surcroît, l'erreur sur la détermination d'altitude, avec R_c bien plus grand que représenté ici, doit être égale en A et en B. Figure inspirée de [Bosser, 2013].**

9.4 Retard des ondes électromagnétiques

Bien des techniques, notamment spatiales, requièrent une mesure de distance entre un observateur et un satellite. La traversée de l'atmosphère engendre un biais dans cette mesure qu'il convient de corriger. Celui-ci est la différence entre, d'une part, la distance parcourue réellement par une onde électromagnétique à une vitesse inférieure à celle dans le vide et, d'autre part, la distance qu'aurait parcouru l'onde dans le vide, donc en ligne droite, pendant le même temps.

Si on note L le trajet optique réellement parcouru par l'onde, G la distance géométrique, et la trajectoire S, le **principe de Fermat** nous dit que le chemin optique entre l'émetteur A et le récepteur B est :

$$\begin{aligned} \ell &= \int_A^B n \, d\ell \\ &= \int_A^B v \, dt \end{aligned}$$

Or le **trajet géométrique** a la distance :

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \int_A^B d\ell \\ &= \int_A^B c \, dt \\ &= c \, (t_R - t_E) \end{aligned}$$

où t_E est l'instant d'émission de l'onde et t_R celui de sa réception. Le **délai** provoqué par la traversée de l'atmosphère prend donc la forme générale :

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \ell - \ell_0 \\ &= \int_A^B (n-1) \, d\ell \\ &= \int_A^B (v-c) \, dt \end{aligned}$$

9.4.1 Délai troposphérique

9.4.1.1 Fonctions de projection

Les modèles de délai troposphérique fournissent des valeurs pour une orientation particulière : le zénith. En revanche, les rayons lumineux visibles ou les faisceaux des signaux radioélectriques satellitaires peuvent venir d'une tout autre direction. Les **fonctions de projections** permettent de calculer le délai pour une distance zénithale z quelconque ou, de façon équivalente, une élévation $h = \pi/2 - z$ quelconque. En première approche, il est géométriquement exact que la fonction de projection est égale à $1/\sin h$; néanmoins, physiquement, cette formulation doit être affinée par des termes correctifs [Nahmani, 2012].

a) Modèle de Marini (1972) La fonction de projection de Marini prend la forme d'une fraction continue [Katsougiannopoulos *et al.*, 2006] :

$$m(h) = \cfrac{1}{\sin h + \cfrac{a_1}{\sin h + \cfrac{a_2}{\sin h + \cfrac{a_3}{\sin h + \cdots}}}}$$

b) Modèle d'Ifadis (1986, 1993) Le modèle d'Ifadis (1986, 1993) tronque la fraction de Marini [Katsougiannopoulos *et al.*, 2006] :

$$m(h) = \cfrac{1}{\sin h + \cfrac{a_1}{\sin h + \cfrac{a_2}{\sin h + a_3}}}$$

Il fournit de surcroît les valeurs des paramètres :

$$\begin{aligned} \forall i \in (1,2) \quad a_i &= k_1 + k_2(P-1000) + k_3(t-15) + k_4\sqrt{e} \\ a_3 &= 0,078 \end{aligned}$$

avec P et e en $mbar$, et t en Celsius.

c) Modèle de Herring (1992) Le modèle de [Herring, 1992] reprend l'idée d'une fraction continue tronquée, mais il en modifie la forme :

$$m(h) = \frac{1 + \frac{a}{1+\frac{b}{1+c}}}{\sin h + \frac{a_1}{\sin h + \frac{a_2}{\sin h + a_3}}}$$

Les coefficients de ce modèle sont calculés en fonction de la latitude du lieu, de son altitude et de la température ; il y a en outre un jeu de formules pour le cas hydrostatique, et un autre pour le cas humide.

d) Modèle de Niell (1996) Le modèle de [Niell, 1996] reprend celui de [Herring, 1992] mais lui ajoute une correction qui dépend de la latitude et du jour de l'année, en s'appuyant sur des paramètres tabulés.

9.4.1.2 Délai zénithal calculé par mélange

Nous avons vu que nous pouvions calculer l'indice de réfraction de l'air à partir des fractions volumiques des différents composants de l'atmosphère et de leur indice de réfraction propre. Si l'on examine une traversée purement zénithale de l'atmosphère, l'intégrale curviligne ne tient compte que des distances radiales au centre de la Terre, c'est-à-dire de l'épaisseur de la troposphère, à savoir environ 8 km à l'équateur et 15 km au pôle :

$$\Delta\ell_{Tropo} = (n_m - 1)\Delta R_{tropo}$$

dont les valeurs vont de $2,30$ m à plus de 4 m, selon l'épaisseur de la troposphère.

9.4.1.3 Domaine visible et infrarouge : le modèle de référence de l'IERS (2010)

C'est dans les **conventions de l'IERS** [Petit & Luzum, 2010] que l'on trouve la description de ce modèle, qui s'applique au domaine visible, classiquement pour ce qui relève de la télémétrie laser sur satellites ou sur la Lune. **Le délai zénithal est séparé en une partie sèche, dite hydrostatique** ($_d$ pour *« dry »*)**, et une partie humide due à la vapeur d'eau** ($_w$ pour *« wet »*) :

$$\begin{aligned} \delta_a^z &\equiv 10^{-6} \int_{r_s}^{r_a} N \; dz \\ &= \int_{r_s}^{r_a} (n-1) \; dz \\ &= \delta_{a;d}^z + \delta_{a;w}^z \end{aligned}$$

où r_s est le rayon géocentrique de la station d'observation, et r_a le rayon géocentrique du sommet de la partie neutre de l'atmosphère. Classiquement, n est l'indice de réfraction, tandis que N est appelé réfractivité.

a) Délai hydrostatique La **partie hydrostatique** du délai, en mètres, s'écrit :

$$\delta_{a;d}^z = 0,002416579 \, \frac{f_d(\lambda)}{f_s(\phi, H)} \, P_s$$

La pression au sol de la station observée est le terme noté P_s (en hectopascals), tandis que la fonction f_s s'écrit :

$$f_s(\phi, H) = 1 - 0,00266\ \cos 2\,\phi - 0,00000028\ H$$

où ϕ est la latitude géodésique, et H la hauteur au-dessus du sol de la station d'observation. La **dispersion de l'atmosphère dans le domaine visible** est traduite par la fonction f_d :

$$\begin{aligned} f_d(\lambda) &= 10^{-2}\ C_{CO_2}\ \left[k_1^*\ \frac{k_0+\sigma^2}{k_0-\sigma^2} + k_3^*\ \frac{k_2+\sigma^2}{k_2-\sigma^2}\right] \\ \text{avec :}\quad k_0 &= 238,0185\ \mu m^2 \\ k_2 &= 57,362\ \mu m^2 \\ k_1^* &= 19\,990,975\ \mu m^2 \\ k_3^* &= 579,551\,74\ \mu m^2 \\ \sigma &\equiv \lambda^{-1} \qquad \text{le nombre d'onde} \\ C_{CO_2} &= 1 + 0,534 \cdot 10^{-6}\ (x_c - 450) \end{aligned}$$

où x_c est la quantité de dioxyde de carbone de l'atmosphère, en parties par millions (ppm).

b) Délai humide La **partie non-hydrostatique**, c'est-à-dire humide et due à la vapeur d'eau, du délai zénithal troposphérique s'écrit :

$$\delta^z_{a;w} = 10^{-4}\ (5,136\ f_w(\lambda) - 3,759\ f_d(\lambda))\ \frac{e_s}{f_s(\phi, H)}$$

avec e_s la pression partielle de vapeur d'eau à la station, en hectopascals ; la **relation de dispersion de la vapeur d'eau dans le domaine visible** est rendue par la fonction f_w :

$$\begin{aligned} f_w &= 0,003\,1101\ (\omega_0 + 3\ \omega_1\ \sigma^2 + 5\ \omega_2\ \sigma^4 + 7\ \omega_3\ \sigma^6) \\ \text{avec :}\quad \omega_0 &= 295,235 \\ \omega_1 &= 2,6422\ \mu m^2 \\ \omega_2 &= -0,032380\ \mu m^4 \\ \omega_3 &= 0,004028\ \mu m^6 \end{aligned}$$

9.4.1.4 Domaine micro-ondes et radiofréquences

Dans ce domaine fréquentiel, on reprend la formulation classique, qui sépare le délai hydrostatique ($_d$) et le délai humide ($_w$) :

$$\begin{aligned} \delta^z_d &= 10^{-6} k_1\ R_d \int_S \rho_d\ dz \\ \delta^z_w &= 10^{-6} k_2\ R_w \int_S \rho_w\ dz + 10^{-6} k_3 R_w \int_S \frac{\rho_w}{T}\ dz \end{aligned}$$

avec R_d et R_w les constantes de gaz parfait de l'air sec et de la vapeur d'eau. Les valeurs données sont celles, approximatives, dans le cas d'une atmosphère standard.

a) Délai hydrostatique de Thayer Dans le cas de l'**équilibre hydrostatique** (c'est-à-dire que le gradient de pression ne dépend que du produit de la masse volumique par le vecteur champ de pesanteur) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ P = \rho\ \overrightarrow{g}$$

nous avons, en utilisant l'intégrale de la relation précédente de $z = 0$ à $z = \infty$, pour le délai hydrostatique (sec) zénithal :

$$\delta_d^z = 10^{-6} \frac{k_1 R_d}{g_m} P_0$$

avec P_0 la pression atmosphérique au sol (en Pa, ici $1013\,hPa$), et la pesanteur moyenne au sol :

$$g_m = 9,784\ (1 - 0,00266\ \cos 2\phi - 0,0028\ H)$$

ϕ et H étant respectivement la latitude (ici 0) et la hauteur (en km, ici 0) ellipsoïdales.

b) Délai humide : le modèle de Saastamoinen (1973) Pour estimer le délai dû à la vapeur d'eau, on utilise, par exemple, le **modèle de Saastamoinen**. Ce délai est plus difficile à estimer car la distribution verticale de vapeur d'eau n'est pas simple. Ce modèle est le suivant :

$$\delta_w^z = 0,002277\ P_{v;0} \left(\frac{1255}{T_0} + 0,05 \right)$$

avec $P_{v;0}$ la pression partielle de vapeur d'eau au sol. Quelques cas typiques peuvent être étudiés, qui sont résumés dans le tableau 9.4.

Lieu	**Température**	**Pression partielle de vapeur d'eau**	**Délai troposphérique humide**
	$^\circ C$	$mbar$	m
Antarctique	-50	0	0
Sahara	40	1,7	0,10
Paris	15	3,3	0,20
Kourou	30	6,7	0,40

Table 9.4 – Quelques valeurs de délais troposphériques dans le domaine radio de par le monde.

Il est donc possible d'estimer le délai troposphérique à partir de mesures météorologiques au sol.

9.4.2 Délai ionosphérique

9.4.2.1 Expression du délai ionosphérique

Soit ℓ la distance mesurée à l'aide du signal (et comportant toutes les perturbations physiques possibles) et ℓ_0 la distance géométrique entre l'émetteur E et le récepteur R. Au regard de la définition du délai, il en apparaît **un de phase et un de groupe** dû à l'ionosphère, respectivement :

$$\Delta\ell_\phi^{iono} = -\frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon_0\,m_e\,f^2} \int_A^B N_e\ d\ell$$
$$\Delta\ell_g^{iono} = \frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon_0\,m_e\,f^2} \int_A^B N_e\ d\ell$$

où nous rappelons que $e^2/(8\pi^2\epsilon_0 m_e) = 40,3$.

L'intégrale de la densité électronique le long du trajet donne une grandeur homogène à un nombre d'électrons par unité de surface, qui peut être interprété comme étant équivalent à une **densité surfacique d'électrons pour l'ionosphère vue comme une couche infiniment mince**, dont l'épaisseur n'est pas l'épaisseur réelle, mais celle mesurée dans la direction du satellite, faisant un angle z avec le zénith. La densité surfacique réelle (verticale) d'électrons pour l'ionosphère est obtenue simplement par :

$$\sigma_{e^-}^{vertical} = \int_A^B N_e \; d\ell \cos z$$

Il est possible de déterminer $\Delta\ell_g^{iono} = \Delta\ell^{iono}$ (nous supprimons l'indice g par soucis de simplicité) à partir de mesures de codes sur deux ondes de fréquences f_1 et f_2.

Soient ℓ_1 et ℓ_2 les distances mesurées sur les signaux, et ℓ_0 la distance géométrique. Nous avons :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \ell_0 + \Delta\ell_1^{iono} \\ \ell_2 &= \ell_0 + \Delta\ell_2^{iono} \end{aligned}$$

9.4.2.2 Non-déviation des ondes radio dans l'ionosphère

Nous allons montrer que l'expression du délai ionosphérique a approximativement le même numérateur pour l'onde 1 et l'onde 2. **Si on considère que les deux ondes ont même origine, alors elles prennent le même trajet**, c'est-à-dire que l'angle d'incidence sur le plasma ionosphérique est le même pour les deux ondes.

En vertu des pouvoir conférés aux lois de la réfraction, nous avons :

$$\begin{aligned} n_v \; \sin i_i &= n_{io} \; \sin i_r \\ \iff i_r &= \arcsin\left(\frac{n_v \; \sin i_i}{1 + \dfrac{N_e \, e^2}{2 \, \epsilon_0 \, m_e \, \omega^2}} \right) \end{aligned}$$

avec les indices $_i$ pour « incident », $_r$ pour « réfracté », $_v$ pour « vide », et $_{io}$ pour « ionosphère ».

Le développement limité de arcsin x donne :

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + o\left(x^{2n+2}\right)$$

ce qui nous donne au premier ordre :

$$i_r \simeq \frac{n_v \; \sin i_i}{1 + \dfrac{N_e \, e^2}{2 \, \epsilon_0 \, m_e \, \omega^2}} + \cdots$$

Reprenant le développement limité déjà vu de $(1+Y)^\alpha$ avec $Y = \frac{N_e e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}$ et $\alpha = -1$, nous avons :

$$i_r \simeq n_v \; \sin i_i \left(1 + \frac{N_e \, e^2}{2 \, \epsilon_0 \, m_e \, \omega^2} \right) + \cdots$$

Or à N_e donné (pour un lieu d'incidence de l'onde), la seule variable est désormais la pulsation $\omega = 2\pi f$. Il devient possible d'évaluer le terme $Z = \frac{N_e e^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}$ pour les fréquences extrêmes utilisées en navigation par satellites et les concentrations électroniques extrêmes de l'ionosphère :

Z	$N_e \sim 10^9 \; m^{-3}$	$N_e \sim 10^{14} \; m^{-3}$
$f_{min} = 1,164 \cdot 10^{12} \; Hz$	$1,84 \cdot 10^{-13}$	$1,84 \cdot 10^{-8}$
$f_{max} = 1,591 \cdot 10^{12} \; Hz$	$9,82 \cdot 10^{-14}$	$9,87 \cdot 10^{-9}$

Autrement dit, l'influence de la fréquence sur la déviation des ondes lors du passage du vide intersidéral à l'ionosphère est complètement négligeable. Il devient par conséquent possible d'affirmer que les ondes 1 et 2 que nous avons introduites précédemment parcourent **le même trajet dans l'ionosphère**, et donc que, l'intégrale de la densité électronique le long du trajet est la même pour les deux ondes. Ce que nous écrivons de cette façon :

$$\begin{aligned} \Delta\ell_1^{iono} &= \frac{A}{f_1^2} \\ \Delta\ell_2^{iono} &= \frac{A}{f_2^2} \end{aligned}$$

9.4.2.3 Élimination du délai ionosphérique

D'où :

$$\Delta\ell_2^{iono} = \frac{f_1^2}{f_2^2}\Delta\ell_1^{iono}$$

En soustrayant les expressions de chemins optiques individuels on obtient :

$$\begin{aligned} \ell_1 - \ell_2 &= \Delta\ell_1^{iono} - \Delta\ell_2^{iono} \\ &= \Delta\ell_1^{iono}\left(1 - \frac{f_1^2}{f_2^2}\right) \\ &= \Delta\ell_2^{iono}\left(\frac{f_2^2}{f_1^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Si bien que le **délai ionosphérique** pour l'onde 1 et l'onde 2 s'expriment :

$$\Delta\ell_1^{iono} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{1 - \frac{f_1^2}{f_2^2}} \tag{9.1}$$

$$\Delta\ell_2^{iono} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{\frac{f_2^2}{f_1^2} - 1} \tag{9.2}$$

Ces relations permettent de construire des combinaisons éliminant cet effet qui peut prendre des valeurs allant de 3 à 15 m au zénith selon qu'on est le jour ou la nuit, et de 9 à 45 m aux faibles élévations. En particulier on utilise la combinaison suivante, dite ℓ_3 ou *ionosphere free* :

$$\ell_3 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}\ell_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}\ell_2$$

Exercices recommandés

11.7.2 page 198, 11.7.3 page 199, 11.7.4 page 200, 11.7.5 page 200, 11.8.2.2 page 207.

Chapitre 10

Observer dans et à travers l'atmosphère terrestre

10.1 Phénomènes électromagnétiques atmosphériques

10.1.1 Le bleu du ciel

La lumière incidente du Soleil est visuellement blanche, c'est-à-dire multifréquentielle du rouge au violet, avec cependant une énergie maximale autour du jaune, compte-tenu de sa température de surface. La composition de l'atmosphère, principalement à base de molécules, c'est-à-dire de petites structures diffusantes, amène à une diffusion selon le régime de Rayleigh, c'est-à-dire en puissance inverse quatrième de la longueur d'onde. Dès lors, **ce sont les courtes longueurs d'onde de la lumière solaire qui sont le plus diffusées**. La conjugaison du spectre solaire et des propriétés de diffusion amènent à ce que ce soit le bleu le plus diffusé. L'atmosphère terrestre et, en particulier, le ciel, apparaissent donc bleus (voir figure 10.1). En altitude, l'épaisseur de l'atmosphère située au-dessus d'un lieu donné est moins importante, si bien que la quantité d'énergie lumineuse diffusée est plus faible : le bleu du ciel est moins intense, et noircit avec l'altitude.

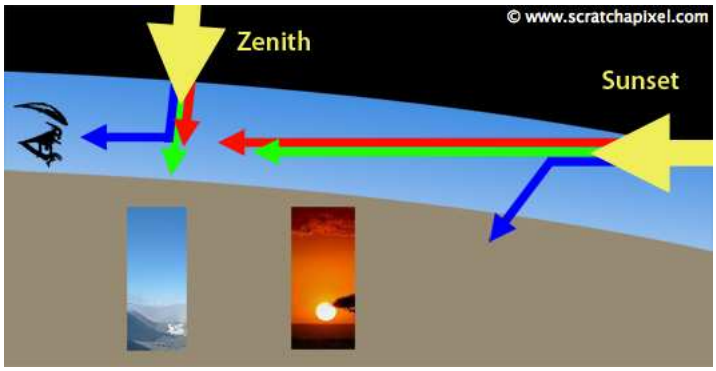


Figure 10.1 – Le ciel bleu et le Soleil rouge au coucher.

10.1.2 Le Soleil rouge à son lever et à son coucher

La diffusion, nous l'avons vu à l'occasion de l'équation du transfert de rayonnement, est d'autant plus importante que l'épaisseur traversée par un rayonnement est importante. Dans le cas du Soleil, en un lieu donné, ce maxima est atteint au lever et au coucher du Soleil. Dans ces situations, **le blanc de la lumière solaire est débarrassée du bleu**, et puisque la diffusion affecte d'autant plus les fréquences que celles-ci sont élevées, c'est donc le rouge qui en est le moins affecté : la lumière en provenance directe du Soleil contient donc principalement du rouge, et le Soleil semble avoir cette couleur (voir figure 10.1).

10.1.3 La Lune rouge des éclipses totales de Lune

Lorsqu'on observe une éclipse de Lune[1], celle-ci n'apparaît pas sombre, mais rouge. En effet, si la lumière blanche du Soleil est dépourvue de sa composante bleue par diffusion, le rouge, lui, demeure et, à ce titre, subit la réfraction. **L'atmosphère de la Terre agit ainsi comme une lentille convergente** : elle fait converger la lumière, parallèle, qui lui vient du Soleil. Celle-ci est débarrassée des autres composantes que le rouge et converge, avec cette couleur, dans l'axe Soleil-Terre. C'est lorsqu'un corps s'y trouve, et à la bonne distance, qu'il se trouve, de fait, éclairé de la sorte. Cette situation se produit à l'occasion des éclipses de Lune (voir figure 10.2).



Figure 10.2 – Le rougissement de la Lune lors de son éclipse totale du 20 janvier 2000. Source : site internet de Fred Espenak, à l'adresse http://www.mreclipse.com/Special/LEprimer.html**.**

10.1.4 L'atmosphère jaune des villes polluées et l'Harmattan

Lorsqu'elles sont l'objet de pics de pollution, les villes modernes se couvrent d'**un voile jaunâtre dû à la pollution**. Cette couleur lui vient de la taille des particules en suspension dans l'atmosphère, qui entraîne un régime de **diffusion de Mie**, dans la gamme correspondant au rougissement de la lumière. Il en va de même lorsque les régions sahéliennes sont soumises à l'Harmattan, ou à des tempêtes de sables annonçant des orages en saison des pluies : le vent soulève des **particules de sable et de poussière** dont la taille caractéristique situe le régime de diffusion dans le même domaine que celui de la pollution (voir figures 10.3 et 10.4).

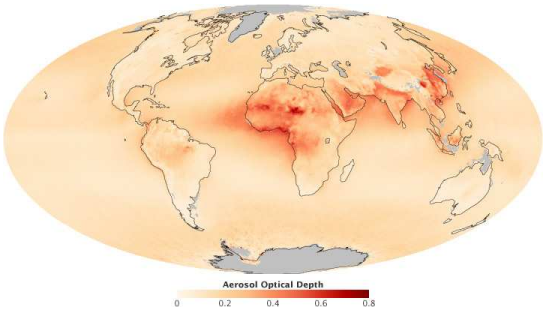


Figure 10.3 – Carte de profondeur optique d'aérosols de 2000 à 2010 établie avec l'instrument MISR (*Multi-angle Imaging SpectroRadiometer*) du satellite Terra. Source : NASA à l'adresse http://earthobservatory.nasa.gov/Features/Aerosols/page5.php**.**

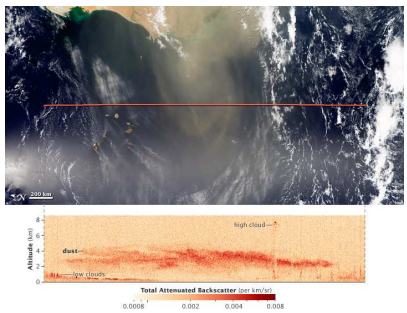


Figure 10.4 – Atténuation par rétro-diffusion due à la poussière et aux nuages en fonction de l'altitude, mesurée par l'instrument MODIS (*Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer*) du satellite Terra et par le satellite CALIPSO (*Cloud-Aerosol Lidar and Infrared Pathfinder Satellite Observation*). Source : NASA à l'adresse http://earthobservatory.nasa.gov/Features/Aerosols/page5.php**.**

1. Lors d'une éclipse de Lune, le Soleil, la Terre et la Lune sont alignés dans cet ordre. La Lune se trouve donc dans l'ombre de la Terre.

10.1.5 Le blanc des nuages et leur assombrissement

Les gouttelettes d'eau composant les nuages sont trop grosses pour être soumises à la diffusion de Mie dans le visible. Elles agissent donc sur le rayonnement en vertu des **lois de l'optique géométrique** et, en particulier, au regard de la réflexion. C'est pourquoi la lumière blanche du Soleil est réfléchie indépendamment de la longueur d'onde par les gouttelettes des nuages, et que ceux-ci apparaissent blancs.

Il n'en reste pas moins que lorsque l'épaisseur de nuages est importante, la quantité de lumière sortant du nuage diminue, en raison des pertes énergétiques subies à chaque réflexion. Les nuages chargés apparaissent ainsi plus sombres : ce sont ceux qui amènent la pluie (voir figure 10.5).



Figure 10.5 – Cumulonimbus vus à 38000 pieds d'altitude. Source : NOAA, à l'adresse http://www.srh.noaa.gov/jetstream/clouds/clouds_intro.htm**.**

10.1.6 Arcs-en-ciel, gloires et halos

Une partie de la lumière blanche frappant une goutte d'eau de taille très supérieure à sa longueur d'onde peut, sous une certaine incidence, y pénétrer, se réfléchir à l'intérieur, et en resortir. Toutefois, **l'eau est un milieu dispersif dans le spectre visible**, si bien que, dès qu'entrée dans la gouttelette, **les diverses longueurs d'onde prennent des directions différentes**, et se reflètent en des endroits différents de la surface de la sphère intérieure de la goutte, selon aussi des angles différents. Par conséquent, les directions de sortie de la lumière de ces longueurs d'onde différentes sont différentes.

On peut assister à un **arc-en-ciel** lorsque, placé entre la source lumineuse (le Soleil) et des gouttes d'eau, on observe la **rétro-réflexion de la lumière ainsi dispersée par les gouttes d'eau**. Pour être dans une telle situation, il faut que le Soleil ne soit pas trop haut dans le ciel, ce qui contraint l'heure d'observation des arcs-en-ciel, soit le matin, soit le soir. Géométriquement, l'arc est en réalité un cône, dont l'observateur occupe le sommet, et doté d'un angle d'ouverture d'environ 41°. La séparation angulaire entre les longueurs d'ondes extrêmes est de 2°, un degré de part et d'autre de l'ouverture du cône (voir figure 10.6 page suivante). La troncature de celui-ci par l'horizon lui donne une forme d'arc, d'où son nom. Dans le cas de l'arc primaire, il y a une réflexion interne et deux réfractions. Au regard des valeurs prises par l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde, le violet se trouve à l'intérieur de l'arc-en-ciel, le rouge à l'extérieur (voir figure 10.7 page suivante).

Toutefois, le nombre de réflexions internes permet de voir émerger d'autres structures, que l'on appelle **arcs secondaire (deux réflexions), tertiaire (trois réflexions)**, etc. Ceux-ci sont moins visibles en raison des pertes énergétiques accrues dont ils font l'objet à chaque réflexion supplémentaire. À chaque ordre supplémentaire, l'ordre des couleurs de l'arc se trouve inversé, en raison de la réflexion supplémentaire qu'elles subissent.

La **gloire** est un phénomène absolument semblable à l'arc-en-ciel, mais que l'on observe par exemple en avion, lorsqu'on observe la lumière rétro-réfléchie par des nuages dans l'axe Soleil-avion (voir 10.8 page suivante). Selon la proximité de l'avion avec le nuage, on voit l'ombre du véhicule entourée d'un arc complet, voire d'arcs d'ordres supérieurs. Les couleurs à l'intérieur et à l'extérieur de chaque arc le sont en fonction des mêmes phénomènes que pour l'arc-en-ciel. Les gloires sont aussi observées pour un observateur terrestre avec de la brume.

Les **halos** sont provoqués par les nuages d'altitudes, lorsque les gouttelettes sont gelées et forment des **micro-cristaux en suspension dans l'atmosphère**. Il n'y a alors pas de réflexion interne aux cristaux,

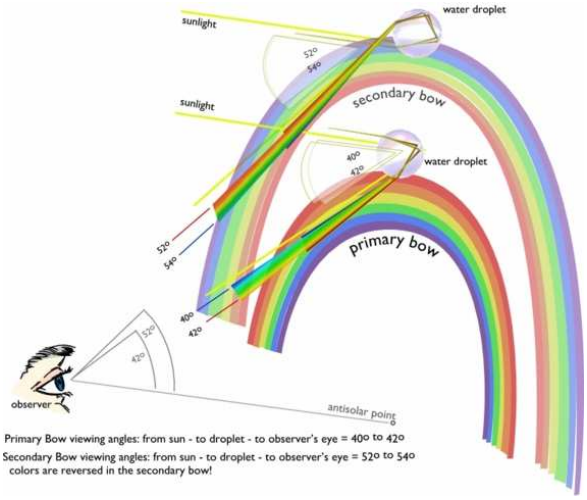


Figure 10.6 – **Géométrie des arcs-en-ciel primaire et secondaire. Source : NSTA à l'adresse** http://home.southernct.edu/~gravess1/projects/nsta_object/4_rainbows_b.html**.**



Figure 10.7 – **Exemple de double arc-en-ciel complet. Source : *Astronomy Picture Of the Day* du 30 septembre 2014, à l'adresse** http://apod.nasa.gov/apod/ap140930.html**.**



Figure 10.8 – **Gloire et ombre d'avion. Source : site internet de Philip Laven, à l'adresse** http://www.philiplaven.com/p2c.html**.**



Figure 10.9 – **Halo solaire à Stockholm. Source : *Astronomy Picture Of the Day* du 10 janvier 2011, à l'adresse** http://apod.nasa.gov/apod/ap110110.html**.**

mais une simple **transmission avec dispersion**, c'est-à-dire réfraction en fonction de la longueur d'onde. On voit alors l'équivalent d'un arc-en-ciel entourant la source de lumière (le Soleil ou la Lune), avec toutefois le rouge à l'intérieur et le violet à l'extérieur, du fait de l'absence de réflexion (voir figure 10.9).

10.1.7 Mirages

Les **mirages** ont pour origine **une inversion de densité de l'air à proximité du sol**. Si celui-ci est très chaud, la densité de l'air immédiatement à son contact est inférieure à celle de l'air situé plus haut ; dans ce cas, l'indice de réfraction est dominé par la densité, et le chemin optique minimal est celui avec une courbure négative (*i.e.* dirigée vers le ciel) : les rayons qui parviennent à l'observateur semblent venir du sol, et sont l'image de ce qui est au-dessus du sol.

Un autre mécanisme de mirage est l'inverse de celui-ci. Si une couche d'air chaud et peu dense se trouve au-dessus d'une couche d'air froid et dense située à proximité du sol, alors le chemin optique minimal a une courbure positive (vers le sol), et l'observateur voit, vers le ciel, l'image d'un objet situé au sol. Par l'ordre de grandeur de la courbure, ce schéma diffère bien entendu des cas d'observations géodésiques où la courbure, ayant le même signe, demeure cependant moins forte.

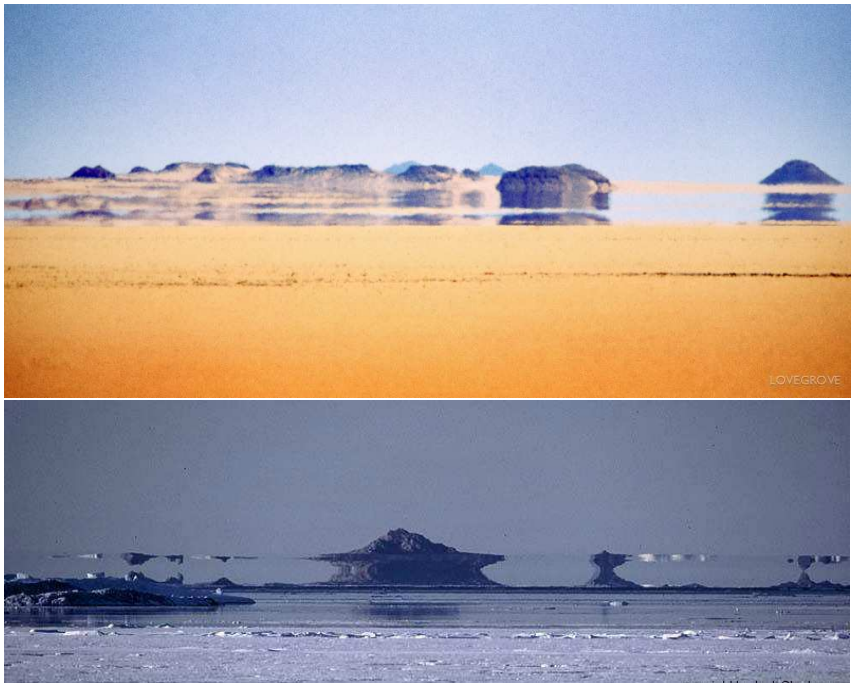


Figure 10.10 – Un mirage et un *fata morgana*. Sources : http://www.nullarborroadhouse.com.au/the-beautiful-desert-mirage-of-the-nullarbor/ et http://tpemiragesg3.free.fr/fata.htm, respectivement.

Enfin, le *fata morgana* est un mirage issu de la superposition de couches d'air de températures différentes.

10.1.8 Aurores polaires

Les **aurores polaires** apparaissent en cas de forte activité solaire. Expulsant des particules chargées (protons, électrons), celles-ci, arrivant au niveau de la Terre, entrent en interaction avec le champ magnétique terrestre et peuvent en particulier se faire piéger par lui, et être défléchies vers les pôles magnétiques de la Terre. Là, elles entrent en collision avec les molécules de l'atmosphère terrestre et les ionisent. La lumière émise à l'occasion de la **recombinaison des molécules** est celle des aurores polaires. Les aurores peuvent être vertes ou rouges, rarement d'autres couleurs. Leur altitude est en général comprise entre 100 et 150 km (voir figure 10.11).



Figure 10.11 – Une aurore polaire vue depuis la station spatiale internationale. Les aurores polaires sont des phénomènes liés à la pénétration de particules solaires jusqu'au pôle magnétique terrestre, qui percutent et excitent des molécules de l'atmosphère terrestre, qui émettent des lueurs vertes ou rouge en se désexcitant. Source : *Astronomy picture of the day*, NASA, 1er juillet 2010.

10.1.9 La réflexion des ondes radio sur l'ionosphère

Un phénomène utilisé par les radio-amateurs pour communiquer de par le monde est la **réflexion des ondes radio sur l'ionosphère**. En effet, nous avons vu que, pour traverser celle-ci, la fréquence

d'un signal électromagnétique doit être supérieure à un seuil appelé fréquence critique ou de Langmuir. En dessous, les signaux sont réfléchis par la couche de l'ionosphère atteignant la densité électronique correspondant à la fréquence critique associée. Ainsi pour un signal émis tangent à la surface terrestre et reçu également tangent à celle-ci après une réflexion sur l'ionosphère (formant donc la distance maximale atteignable par ce signal), l'angle d'incidence sur la couche réflexive va de 11° (couche E) à 16° (couche F). Rappelons aussi que la fréquence critique est, selon la densité électronique, de quelques centaines de mégahertz.

10.2 Missions spatiales et atmosphère terrestre

10.2.1 L'observation de la Terre depuis l'espace

L'observation de la Terre depuis l'espace est faite par les satellites et elle est possible dans les bandes de fréquences où celle-ci est transparente :
— le visible et le proche infrarouge ;
— les ondes radio au-delà de la fréquence critique ionosphérique.

10.2.1.1 Observation de la Terre dans le visible et le proche infrarouge

Il est difficile de dénombrer les satellites observant la Terre dans le domaine visible et proche infrarouge. On peut cependant relever deux types d'applications à de telles observations :
— la météorologie ; l'orbite de ces satellites est alors géostationnaire ;
— l'imagerie à haute résolution ; l'orbite de ces satellites est alors basse et quasi-polaire.

L'optique d'observation dans le visible repose d'abord sur des miroirs de focalisation de la lumière puis sur des lentilles. **Les capteurs sont des capteurs dits passifs : ils se contentent de recevoir un signal**. Ce sont des capteurs électroniques à transfert de charge (CCD – *Charge Coupled Device*), dont le principe est celui de l'effet photoélectrique. Ce sont des plaques rectangulaires couvertes de carrés élémentaires appelés pixels, qui convertissent l'énergie des photons absorbés en courant électrique ; ce dispositif est exactement le même que celui des appareils photographiques numériques (voir figure 10.12).

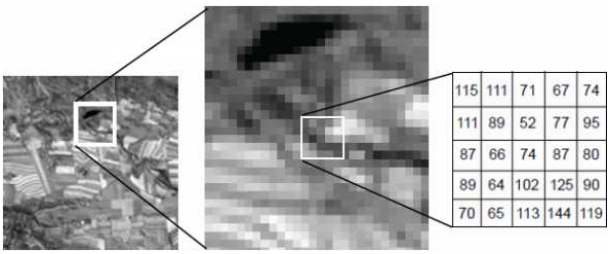


Figure 10.12 – Principe d'échantillonnage d'une image par les pixels d'un capteur CCD.

Les capteurs visibles et IR sont généralement de deux types (voir tableau 10.1) :
— soit **panchromatiques** : ils observent dans une large bande fréquentielle (le visible), et l'image obtenue est en noir et blanc ;
— soit **multispectral** : ils observent dans plusieurs bandes spectrales étroites, donc en noir et blanc, ce qui permet de composer des images en couleur par application sur chacune d'un filtre de rendu. En général, ces bandes sont le RVB (rouge-vert-bleu) qui donne des couleurs naturelles, ou l'infrarouge-rouge-vert, qui est alors codé en image en RVB : l'infrarouge apparaît rouge, le rouge apparaît vert, et le vert apparaît bleu. C'est une représentation dite en fausses couleurs (voir figures 10.13 page suivante, 10.15 et 10.16 page 165). Il est naturellement possible de multiplier le nombre de bandes d'observation.

Satellite	Panchromatique	Bleu	Vert	Rouge	Infrarouge
SPOT-6	$455 - 745\ nm$	$455 - 525\ nm$	$530 - 590\ nm$	$625 - 695\ nm$	$760 - 890\ nm$
Pleiades-1	$480 - 830\ nm$	$430 - 550\ nm$	$490 - 610\ nm$	$600 - 720\ nm$	$750 - 950\ nm$

Table 10.1 – Bandes spectrales d'observation des satellites SPOT-6 et Pleiades-1.

La surface terrestre peut ainsi être caractérisée spectralement, et les signatures chimiques de certaines substances de la surface ou de l'atmosphère peuvent ainsi être identifiées par nature, telles que le couvert végétal, l'humidité de l'atmosphère, etc., aussi bien qu'en raison de certains phénomènes thermiques : fuites thermiques de bâtiments, puits de gaz ou de pétrole, volcans, incendies, etc. Il est aussi possible de mettre en évidence la profondeur optique du rayonnement, au regard de la quantité d'énergie reçue à un instant donné comparée à une autre époque de référence en terme de transparence, qui traduit des phénomènes d'absorption ou de diffusion de Mie ; ces phénomènes peuvent être la traduction de la présence d'aérosols dans l'atmosphère due à une pollution, ou à des vents de sable, à des fumées d'incendies, etc.

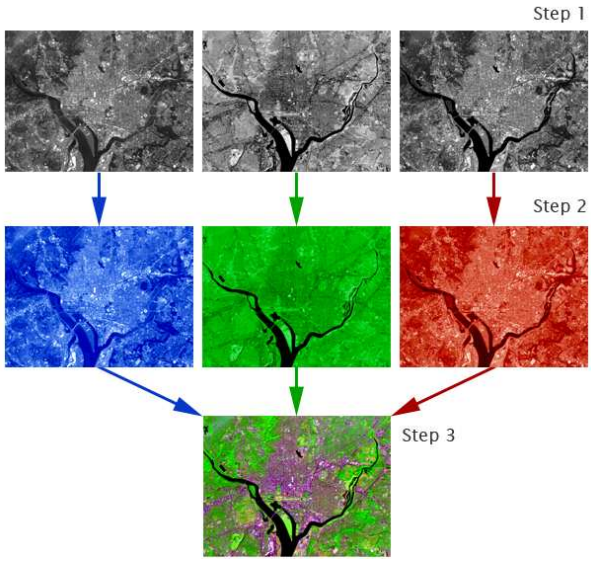


Figure 10.13 – **Exemple de composition d'une image multispectrale avec le satellite Landsat. Source : GSFC/NASA à l'adresse** http://compositor.gsfc.nasa.gov/color_comp.html**.**

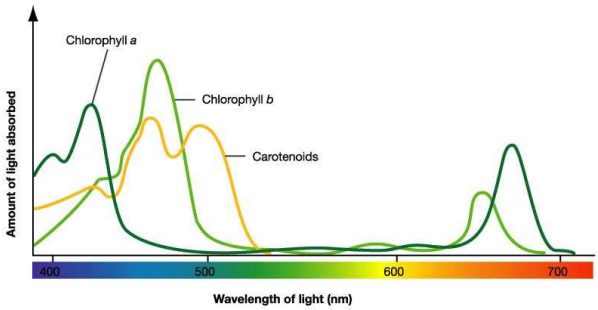


Figure 10.14 – **Spectres des chlorophylles A et B et du carotène. Source : université du New Hampshire, à l'adresse** http://cfb.unh.edu/phycokey/Choices/Chlorophyceae/Chloro_key.html**.**

10.2.1.2 Observation de la Terre dans les ondes radio

Dans les ondes radio, les capteurs sont actifs, *i.e.* ils émettent un signal qui se réfléchit à la surface de la Terre, et dont ils observent l'écho : c'est la technologie du RADAR [2]. Alors que dans le cas de l'imagerie « classique » [3], la discrimination entre deux objets distincts est angulaire, elle se fait ici en distance : deux objets situés à la même distance ne sont pas discriminés. On peut alors utiliser la technique de la synthèse d'ouverture [4] consistant à exploiter le fait que tout point situé dans dans le faisceau du capteur n'est pas observé qu'une fois, de sorte que le déplacement du capteur, naturel ou motorisé, sert à accumuler de l'information pour chaque point observé ; le traitement de l'effet Doppler auquel est soumis le signal de chacun de ces points permet d'en former une image. Les images radar ne sont toutefois pas similaires aux images visibles et elles doivent être interprétées différemment (voir figure 10.18 page 166).

L'**altimétrie spatiale** est une technique utilisant ce principe pour la mesure du niveau des océans (voir figure 10.19 page 166) : la mesure du temps d'aller-retour d'une onde électromagnétique entre un satellite et la surface océanique donne accès à la distance qui les sépare ; la connaissance de l'orbite pré-

2. *Radio Detection And Ranging.*
3. Œil, photographie, etc.
4. SAR : *Synthetic Aperture Radar.*



Figure 10.15 – **Washington DC observé par le satellite Landsat en mode 321. Source : GSFC/NASA, à l'adresse** http://compositor.gsfc.nasa.gov/index.html**.**

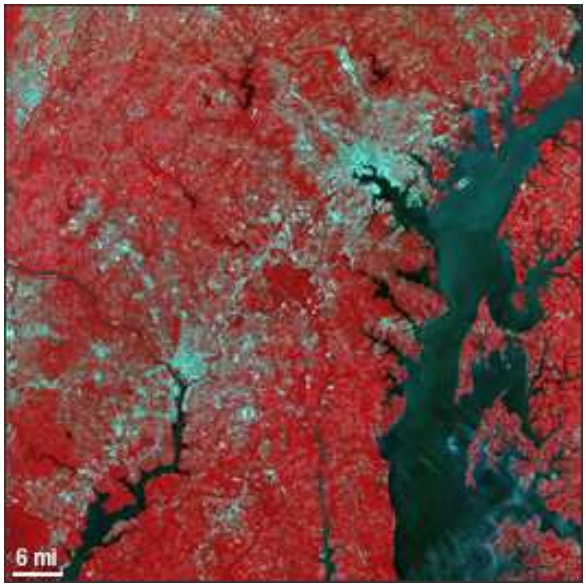


Figure 10.16 – **Washington DC observé par le satellite Landsat en mode 432s. Source : GSFC/NASA, à l'adresse** http://compositor.gsfc.nasa.gov/index.html**.**

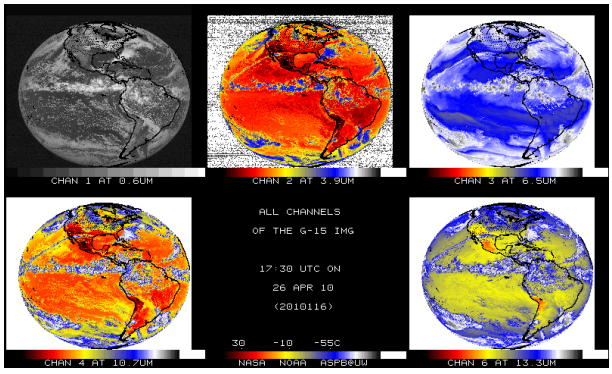


Figure 10.17 – **La Terre vue dans plusieurs longueurs d'onde infrarouges par le satellite météorologique GOES. Source : NASA/NOAA.**

cise du satellite, obtenue par différentes techniques géodésiques (DORIS[5], SLR[6], GNSS[7]) permet d'en déduire l'altitude de la surface océanique et ses variations spatio-temporelles (voir figures 10.20 et 10.21 page 167). Le radiomètre embarqué sur le satellite mesure le contenu intégré en vapeur d'eau de l'atmosphère, dont est déduit le retard atmosphérique humide subi par l'onde de l'altimètre. Par ailleurs, l'utilisation de plusieurs fréquences pour l'altimètre permet de se soustraire à l'influence du délai ionosphérique (voir page page 156).

10.2.2 Quelques éléments pour penser une mission spatiale d'observation de la Terre

L'observation de la Terre requiert de penser de façon intégrée à l'ensemble des paramètres à prendre en compte ; ci-dessous, sans prétendre à l'exhaustivité, en voici quelques-uns.

10.2.2.1 L'objet étudié

La première chose à faire consiste à **définir l'objet à étudier**, sa physique, sa géographie, le domaine de rayonnement dans lequel il émet, ou absorbe, ou réfléchit du rayonnement, la gamme énergétique de

5. Détermination d'Orbite par Radio-Intégration Satellitaire.
6. *Satellite Laser Ranging.*
7. *Global Navigation Satellite System.*

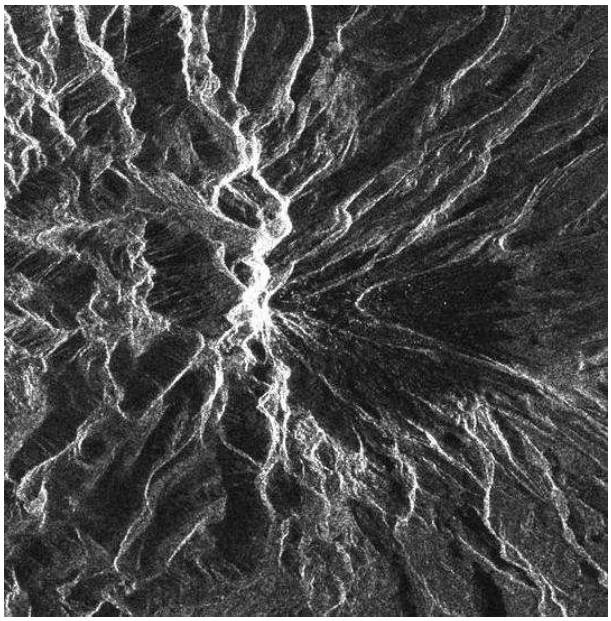


Figure 10.18 – Le volcan Cayambe (Équateur) par imagerie RADAR à synthèse d'ouverture. Source : ESA à l'adresse http://earth.esa.int/ers/ers_action/ecuador_cayambe.html**.**

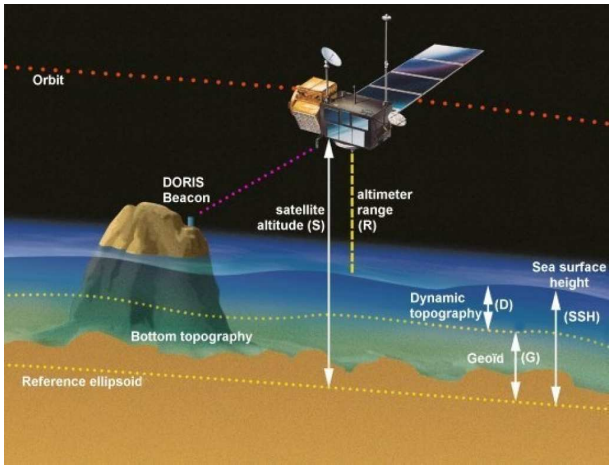


Figure 10.19 – Principe de l'altimétrie spatiale. Source : http://aviso.altimetry.fr/gallery/fr/entry_21_principe_de_l_altimetrie_satellite_topex_poseidon_.html**.**

ceux-ci, etc. On doit aussi répondre précisément à une commande : pour qui, pour quoi, pour quels usages doit-on étudier cet objet et le phénomène qui lui est associé ? De cette analyse découlent les points qui suivent.

10.2.2.2 Le type de capteur

Le **type d'observable** définit d'abord si le capteur est actif ou passif :
— le capteur actif émet un rayonnement et capte l'écho réfléchi par les objets étudiés, la finalité pouvant être une mesure physique ou une image ;
— le capteur passif n'émet aucun rayonnement, et ne capte que ce que les objets étudiés émettent ou réfléchissent dans sa direction.

La gamme de longueur d'onde et la gamme énergétique va définir les capteurs à utiliser.

10.2.2.3 La géométrie

Conséquence de l'analyse des usages faite précédemment, la **géométrie de la prise de vue** définit l'orbite de la mission, ainsi que les besoins d'agilité du satellite, et donc certains de ses équipements (senseurs stellaires, moteurs d'orientation, etc.).

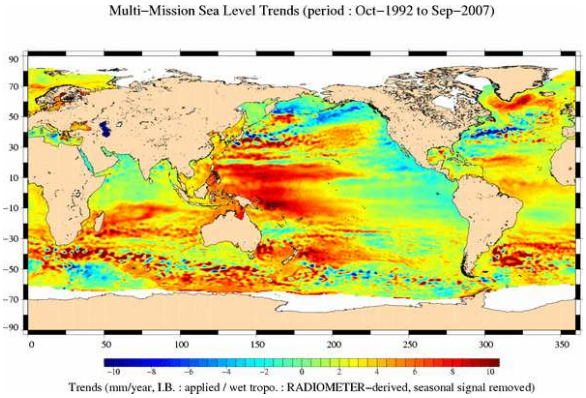


Figure 10.20 – Carte de variation du niveau des océans mesurée d'octobre 1992 à septembre 2007. Source : CNES/AVISO à l'adresse http://www.aviso.altimetry.fr/en/news/idm/2008/may-2008-altimeters-charts-sea-level.html**.**

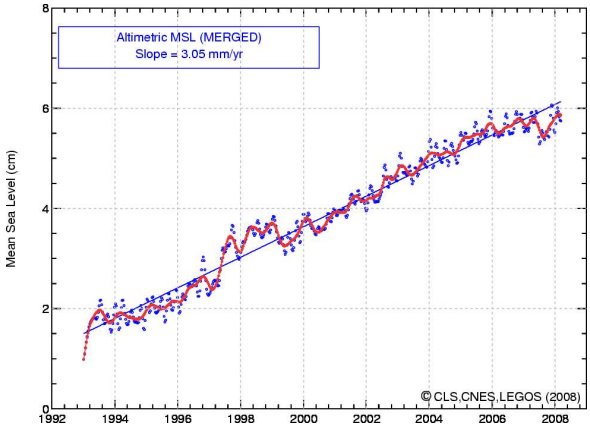


Figure 10.21 – Variations du niveau moyen des océans entre octobre 1992 et décembre 2008 mesurées par les satellites d'altimétrie. Les variations saisonnières sont retirées. La droite de régression est indiquée, de pente $3\ mm/an$**. Source : CNES/AVISO, à l'adresse** http://www.aviso.altimetry.fr/en/news/idm/2008/may-2008-altimeters-charts-sea-level.html**.**

Son **orbite** répond aussi aux besoins ; ci-dessous, quelques considérations :
- l'altitude du satellite définit sa résolution :
  - l'orbite basse, entre 700 et 1100 km, pour la haute résolution ;
  - l'orbite géostationnaire pour la basse résolution.
- pour de l'imagerie, on va chercher à avoir une résolution constante au cours d'une orbite, ce qui implique une orbite circulaire, donc une excentricité nulle ;
- dans le domaine visible, on va chercher un angle d'éclairement à peu près constant, donc une orbite héliosynchrone, ce qui est souvent choisi pour l'imagerie à haute résolution (orbite basse), ce qui implique, au regard des lois de la mécanique céleste, une orbite polaire ;
- la répétabilité des mesures, pour suivre un phénomène global (comme le niveau des mers), implique un jeu sur l'altitude et l'inclinaison.

Là encore, cette énumération n'est pas exhaustive, et ne vise qu'à sensibiliser aux exigences techniques d'une mission spatiale.

10.2.2.4 La plate-forme

Le choix de la **plate-forme** est central, car il va décider, entre autres :
- de la masse du satellite, et donc de son coût ;
- de la quantité de carburant emporté, donc de sa durée de vie ;
- des équipements, standards le cas échéant, de celle-ci : localisation, senseurs stellaires, panneaux solaires (donc puissance électrique disponible pour le fonctionnement général et les instruments), communication avec la Terre (donc quantité de données transmissibles), etc. ;
- de la place allouée à chaque instrument, donc de leur nombre et de leurs caractéristiques ;
- du lanceur utilisé (environ un tiers du budget total de la mission en général).

Bien sûr, le choix de la plate-forme est réalisé en lien avec les besoins de la mission, mais il impose aussi à celle-ci des contraintes qui influent sur la réponse qui y est apportée.

10.2.2.5 Un exemple : le Afternoon train de la NASA

La constellation *A-train* est un ensemble de satellites qui se suivent sur la même trajectoire (voir figure 10.22 page suivante), et qui sont équipés de différents instruments (voir tableau 10.2 page 169),

avec différentes fauchées. Ceci permet une observation quasi-synchronisée des mêmes scènes.

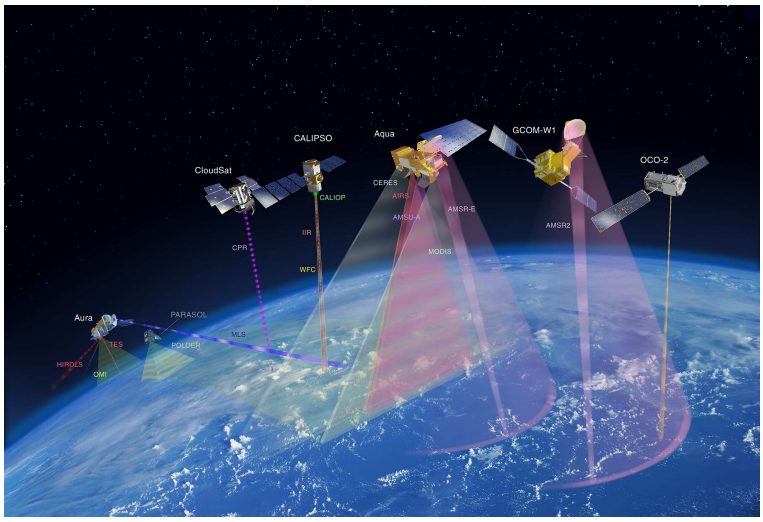


Figure 10.22 – La constellation *A-Train*. Source : http://atrain.nasa.gov/images.php.

À titre d'exemple, les figures 10.23, 10.24, 10.23, et 10.26 page 170 montrent quelques illustrations d'observations des satellites de la constellation *A-Train* relatives à l'éruption du volcan islandais Eyjafjallajökull en avril 2010.

10.2.3 Géodésie satellitaire et atmosphère

La **géodésie spatiale**, au sens large, exploite les deux bandes de transparence de l'atmosphère. La géodésie satellitaire en particulier établit des liens entre stations terrestres et satellites afin d'aboutir à une détermination géométriquement cohérente de ces ensembles :

- la **télémétrie laser sur satellite ou sur la Lune** (voir figure 10.27 page 170) opère dans les domaines visible (vert) et très proche infrarouge, et mesure le temps de l'aller-retour d'un faisceau qui se réfléchit sur des miroirs embarqués sur satellites ; ceux-ci soit sont dédiés à cette fonction (satellites LAGEOS, ETALON, Starlette, Stella, etc.) soit embarquent des réflecteurs mais ont une autre vocation (satellites GLONASS, GALILEO, observation de la Terre, etc.) ;
- la **technique DORIS** (voir figure 10.28 page 171), développée par le CNES et l'IGN, consiste dans l'émission de signaux par des balises au sol, sur deux fréquences (400 MHz et 2 GHz), et de la mesure de la fréquence du signal et, en particulier, du décalage subi par celle-ci par rapport à la fréquence d'émission, sous l'effet Doppler en raison du mouvement relatif entre la balise d'émission et le satellite ;
- la **technique GNSS** (voir figures 10.29, 10.30, 10.31 et 10.32 page 171), qui regroupe les systèmes GPS, GLONASS, GALILEO et BEIDOU, repose sur la mesure, par des récepteurs au sol, du temps de propagation de l'onde électromagnétique émise par les satellite, dont on déduit, pour chacun, la distance et, par suite de trilatération, la géométrie de l'ensemble satellites-récepteur.

À chaque fois, **le délai troposphérique est une inconnue estimée**, au même titre que les autres paramètres (position des stations, orbites des satellites, orientation de la Terre, etc.). La mesure affectée du délai atmosphérique est réalisée dans la direction séparant la station d'observation au satellite ; néanmoins, pour des raisons de comparaison et de standardisation, elle est rabattue à la verticale : on parle alors de délai troposphérique zénithal (ZTD – *Zenithal Tropospheric Delay*). Le délai ionosphérique peut être estimé, mais on peut, là aussi, s'en débarrasser par l'utilisation de deux fréquences et la formation de l'observable *ionosphere free* (voir page page 156).

Satellite	Instrument		Measurement
Aura 	HIRDLS	High Resolution Dynamics Limb Sounder	Temperature and composition of the upper troposphere, stratosphere, and mesosphere; aerosol extinction and cloud height
	MLS	Microwave Limb Sounder	Temperature and composition of the upper troposphere and stratosphere; upper tropospheric cloud ice
	OMI	Ozone Monitoring Instrument	Total column ozone, nitrogen dioxide, sulfur dioxide, formaldehyde, bromine monoxide, aerosol absorption, and cloud centroid pressure
	TES	Tropospheric Emission Spectrometer	Temperature, ozone, carbon monoxide, and water vapor profiles from the surface to lower stratosphere
PARASOL 	POLDER	POLarization and Directionality of Earth's Reflectances	Polarized light measurements of clouds and aerosols
Glory 	APS	Aerosol Polarimetry Sensor	Visible, near-infrared, and short-wave infrared data scattered from aerosols and clouds
	CC	Cloud Camera Sensor Package	Continuous cross-track coverage over a field of view centered on the APS along-track footprint
	TIM	Total Irradiance Monitor	Total solar irradiance with extreme accuracy and precision
CALIPSO 	CALIOP	Cloud-Aerosol Lidar with Orthogonal Polarization	High-resolution vertical profiles of aerosols and clouds
	IIR	Imaging Infrared Radiometer	Nadir-viewing, non-scanning imager
	WFC	Wide Field Camera	Fixed, nadir-viewing imager with a single spectral channel covering a portion of the visible (620–670 nm) region of the spectrum to match Band 1 of the MODIS instrument on Aqua (see below)
CloudSat 	CPR	Cloud Profiling Radar	Vertical profiles of water amount measured by backscattered radar signals from clouds
Aqua 	AIRS	Atmospheric Infrared Sounder	Highly accurate temperature profiles within the atmosphere
	AMSR-E	Advanced Microwave Scanning Radiometer for Earth Observing System (EOS)	Precipitation rate, cloud water, water vapor, sea-surface winds, sea-surface temperatures, ice, snow, and soil moisture
	AMSU-A	Advanced Microwave Sounding Unit-A	Temperature profiles in the upper atmosphere, especially in the stratosphere
	CERES	Cloud's and Earth's Radiant Energy System	Solar-reflected and Earth-emitted radiation; cloud properties (altitude, thickness, and size of the cloud particles)
	HSB	Humidity Sounder for Brazil	Humidity profiles throughout the atmosphere **(Inoperative since 2003)**
	MODIS	MODerate-resolution Imaging Spectroradiometer	Vegetation, land surface cover, ocean chlorophyll fluorescence, cloud and aerosol properties, fire occurrence, land snow cover, and sea ice cover
GCOM-W1 	AMSR2	Advanced Microwave Scanning Radiometer, second generation	Enhanced understanding of water in Earth's climate system and the global water cycle, and of additional components of Earth's climate system and their interactions
OCO-2 	Three high-resolution grating spectrometers		Full-column measurements of CO_2

Table 10.2 – **Instruments et observations des satellites de la constellation *A-Train*. Source :** http://atrain.nasa.gov/historical_graphics.php.

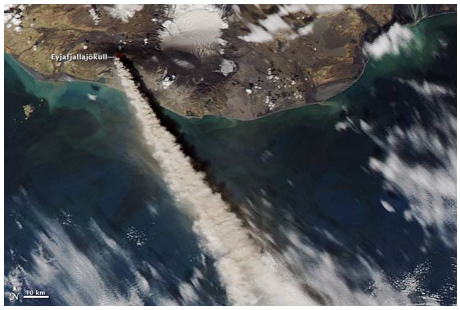


Figure 10.23 – Image visible du volcan Eyjafjallajökull en éruption, en avril 2010, avec l'instrument MODIS du satellite AQUA. Source : http://atrain.nasa.gov/images.php.

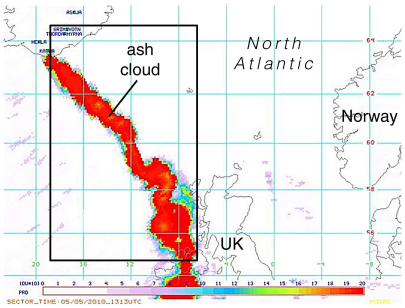


Figure 10.24 – Observation du panache de dioxyde de soufre, signature d'une éruption volcanique, en l'occurrence celle du Eyjafjallajökull, en avril 2010. Source : http://atrain.nasa.gov/images.php.

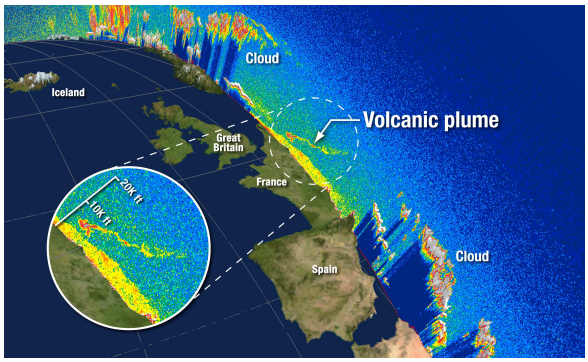


Figure 10.25 – Observation de la dérive vers l'Europe et de l'épaisseur du panache du volcan Eyjafjallajökull, en avril 2010, par des mesures par LIDAR et en infrarouge. Source : http://atrain.nasa.gov/images.php.

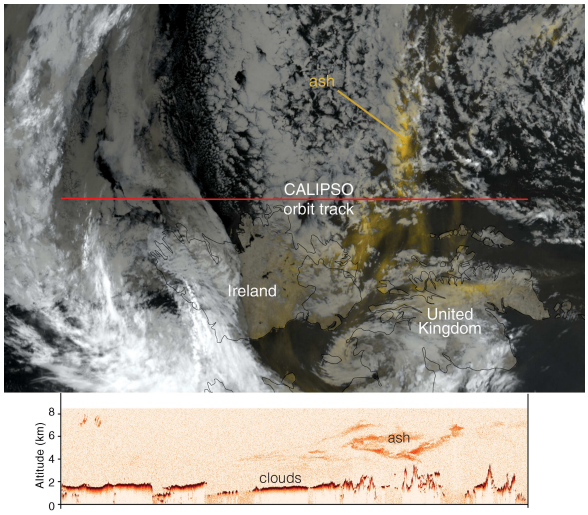


Figure 10.26 – Mesure de l'altitude du panache et des nuages, lors de l'éruption du volcan Eyjafjallajökull, en avril 2010, par l'instrument MODIS du satellite AQUA (en haut), et l'instrument CALIOP du satellite Calipso (en bas). Source : http://atrain.nasa.gov/images.php.



Figure 10.27 – Un faisceau de télémétrie laser sur satellite (à gauche), et le satellite français Stella (à droite).





Figure 10.28 – Une balise d'émission du système DORIS, sur l'archipel Crozet (à gauche), et une antenne de réception, installée sur un satellite en orbite basse.



Figure 10.29 – Un satellite GPS.



Figure 10.30 – Un satellite GLONASS.



Figure 10.31 – Des satellites GALILEO.



Figure 10.32 – Une station GNSS, à Grasse, appartenant au CNES et gérée par l'Observatoire de la Côte d'Azur ; cette station est intégrée au Réseau GNSS Permanent géré par l'IGN. Source : http://rgp.ign.fr/STATIONS/#GRAS.

10.3 L'observation du cosmos depuis la Terre

10.3.1 L'observation dans les bandes de transparence de l'atmosphère

L'observation de l'univers depuis la Terre n'est, là encore, possible que dans **les bandes de transparence de l'atmosphère, donc dans le visible et le domaine radio**. La gamme des phénomènes observables est évidemment très large, et l'instrumentation elle aussi très variée. Une différence notable avec l'observation de la Terre depuis l'espace tient en ce que, en astronomie, les observations ne peuvent être en mode actif que pour les objets relativement proches, donc du système solaire.

Le domaine radio peut cependant faire aussi l'objet d'observations passives, en imagerie et en interférométrie : c'est le cas de la **technique VLBI** (*Very Long Baseline Interferometry*), quatrième technique de la géodésie spatiale, qui permet à la fois un positionnement relatif millimétrique de deux antennes situées à des milliers de kilomètres, et une résolution de quelques millisecondes d'arc sur des objets extrêmement lointains comme les quasars.

Dans les longueurs d'onde d'opacité de l'atmosphère, on a recours aux télescopes spatiaux, mais pas seulement : si Hubble observe aussi dans le visible, son statut spatial le dispense de la turbulence et de la diffusion atmosphériques.

Nous ne détaillons cependant pas plus avant ce domaine, qui nous emmènerait bien trop loin ; les bases sur lesquelles il repose sont toutefois les mêmes que celles esquissées dans ce document.



Figure 10.33 – Le *Very Large Telescope* qui observe dans le visible.

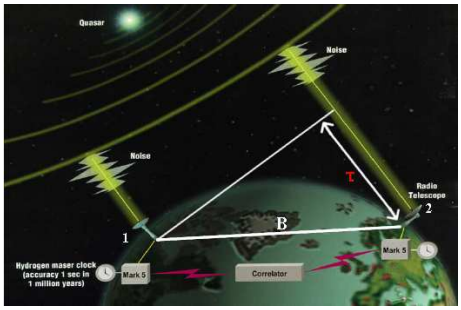


Figure 10.34 – Schéma de fonctionnement du VLBI.

10.3.2 La pollution lumineuse

On appelle **pollution lumineuse l'excès de luminosité de l'atmosphère provoqué par l'illumination artificielle**, d'origine humaine, sur les routes, les bâtiments, etc. Ce phénomène concerne désormais une large fraction de la population urbaine, qui ne voit désormais plus beaucoup d'étoiles. Ce phénomène est d'autant plus important que l'atmosphère diffuse le rayonnement artificiel ; ainsi, les épisodes de pollution, ou de présence de particules dans l'atmosphère ont tendance à accroître la diffusion d'une lumière qui, de plus, a tendance à augmenter. Par ailleurs, les efforts d'économies d'énergie amènent de plus en plus à équiper les dispositifs d'éclairage de diodes électro-luminescentes qui, contrairement aux éclairages habituels aux sodium (jaune-orangé), émettent dans le blanc, voire le bleu, c'est-à-dire qu'ils émettent dans des bandes de longueurs d'onde beaucoup plus diffusés par l'atmosphère, ce qui aggrave la situation. La pollution lumineuse constitue un obstacle de taille pour l'astronomie optique mais, de surcroît, en atténuant le cycle diurne de la lumière, elle perturbe fortement le comportement des animaux diurnes ainsi que les cycles du sommeil.

Les travaux de cartographie de la pollution lumineuse partent d'une luminance du ciel nocturne de 174 $\mu Cd{\cdot}m^{-2}$ [Falchi *et al.*, 2016] et mesurent l'excès de lumière reçue au sol, supposée d'origine artificielle (voir figures 10.37 page suivante et 10.38 page 174).

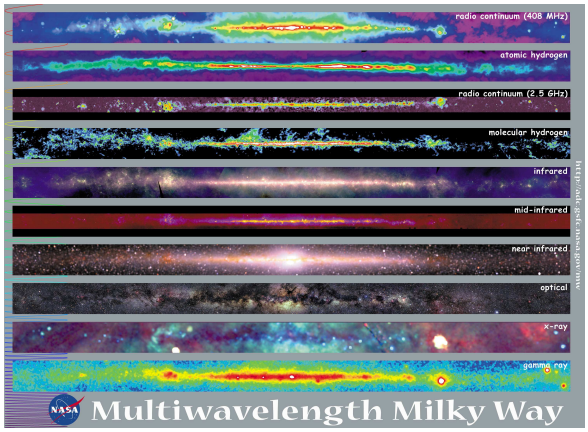


Figure 10.35 – La Voie Lactée à plusieurs longueurs d'onde. Source : NASA à l'adresse http://mwmw.gsfc.nasa.gov/mmw_product.html.

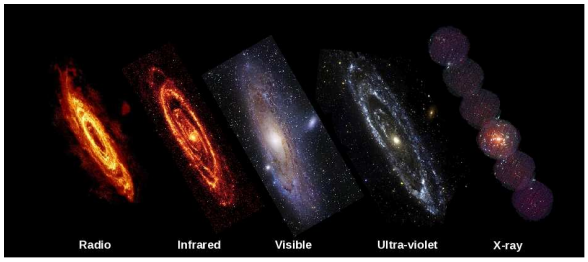


Figure 10.36 – La galaxie d'Andromède à plusieurs longueurs d'onde. Source : site internet de la mission Planck, à l'adresse http://planck.cf.ac.uk/science/mm-wave-astronomy.

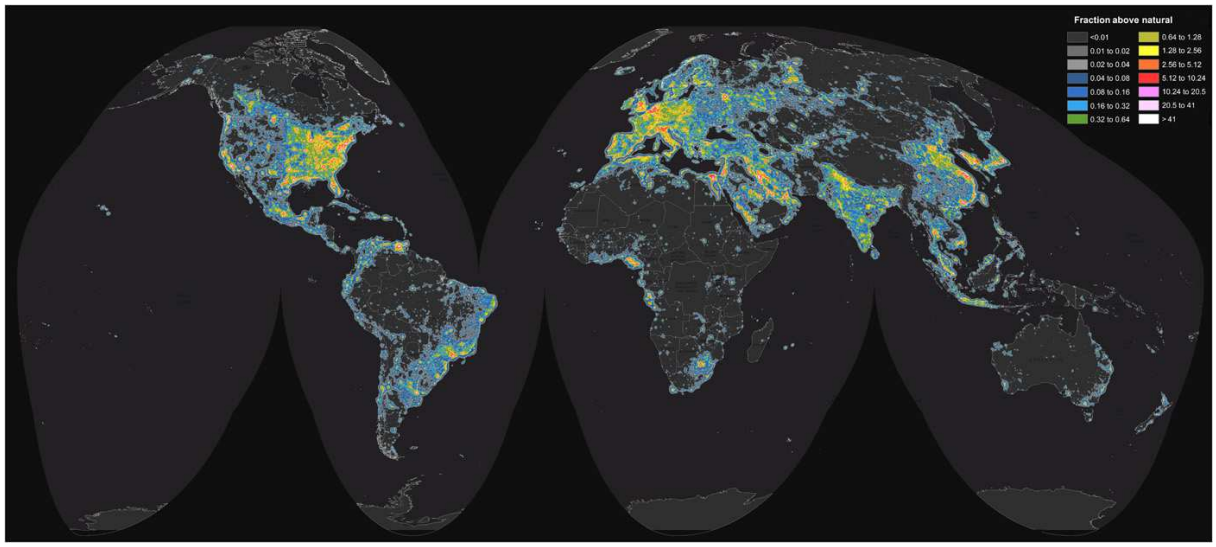


Figure 10.37 – Carte mondiale de la pollution lumineuse dans le visible. Source : [Falchi *et al.*, 2016].

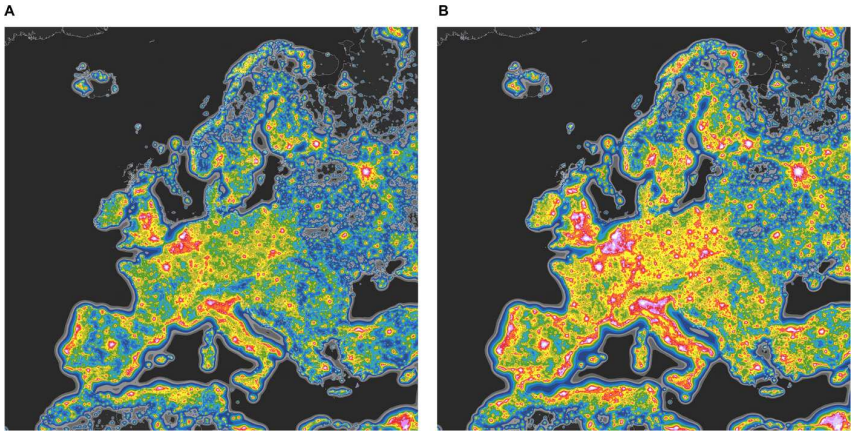


Figure 10.38 – **Carte européenne de la pollution lumineuse dans le visible, observée (à gauche), et prédite en cas de remplacement des éclairages actuels au sodium vers des LED à** $4000\ K$ **(à droite). Source : [Falchi *et al.*, 2016].**

Conclusion

Au terme de cet aperçu posant les bases de la compréhension des très riches phénomènes de l'électromagnétisme, nous pouvons dresser le constat d'avoir jeté des ponts vers d'autres domaines, permettant au lecteur d'élargir encore son horizon.

Il est d'abord possible d'approfondir les **théories des champs classique et quantique**. La première s'attache à la relativité galiléenne élargie aux vitesses proches de celles de la lumière : c'est ce qu'on appelle la relativité restreinte et ses conséquences. La seconde n'est autre que la description quantique des champs, les mettant en lien avec la physique des particules. Une des applications de ces avancées théoriques réside dans le problème des interactions entre les atomes et la matière ; celles-ci font l'objet d'avancées considérables de nos jours, avec les atomes froids et la manipulation de particules individuelles, domaines dans lesquels la France est en pointe.

Il est ensuite loisible de se pencher sur les **problématiques astrophysiques liées au rayonnement**. La plupart des corps de l'Univers ne peuvent être étudiés qu'à distance, si bien que la lumière est, dans la plupart des cas, le vecteur central de l'étude de ces corps. Qu'il s'agisse du fond diffus cosmologique, des galaxies, des étoiles ou des surfaces et atmosphères planétaires, la connaissance et la compréhension des phénomènes d'émission, d'absorption ou de propagation du rayonnement qui leur sont liés sont primordiaux pour pouvoir les observer.

Ceci nous amène à un cas très particulier de milieu, finalement celui qui donne le thème de ce document : l'**atmosphère terrestre**. Comme esquissé à la fin de ce cours, l'étude de la surface terrestre par voie spatiale, l'exploitation de signaux qui la traversent, ou l'étude même de l'atmosphère elle-même constitue le débouché le plus évident de cette introduction.

Enfin, l'étude des **capteurs** de lumière, qui est peut-être l'aspect le moins développé ici, pourra tirer avantage des considérations développées ici, dans quelque domaine que ce soit.

Cinquième partie

Annexes

Chapitre 11

Exercices

Plusieurs de ces exercices sont principalement inspirés de [Bosser, 2013], [Bock, 2001] et [Acker & Jaschek, 1995].

Ci-dessous un ensemble de rappels pour ces exercices et pour la composition.

La qualité de la rédaction, de l'orthographe ainsi que la présentation compteront dans la notation. Les étudiants veilleront à bien numéroter les questions auxquelles ils répondent, et à mettre en valeur les réponses et résultats démontrés ou calculés en les encadrant.

Lorsque c'est demandé ou nécessaire, un schéma doit être réalisé avec soin, et tout doit être fait pour le rendre lisible : taille, couleurs, éléments géométriques faits à la règle ou au compas, annotations et explications, etc.

Si un étudiant constate ce qu'il pense être une erreur dans l'énoncé, il le signale sur sa copie, en propose une correction et poursuit sa composition en en tenant compte.

Sauf mention contraire, les résultats établis pour une question peuvent être utilisés pour répondre aux questions suivantes.

Les paramètres et relations nécessaires à la résolution des questions posées sont donnés en annexe. Ceux donnés pour une question particulière ne peuvent être utilisés que pour celle-ci. Aucun paramètre ne figurant pas dans l'énoncé ne peut être utilisé.

Enfin, nous recommandons de ne pas arrondir les valeurs numériques des résultats intermédiaires, sous peine de propager des erreurs liées à ces arrondis ; en revanche, les valeurs données en résultats ne doivent contenir qu'un nombre de chiffres significatifs compatible avec la précision de la grandeur en question. Elles doivent aussi être exprimées dans les unités les plus adaptées.

11.1 Diffraction et interférences

On rappelle que la largeur angulaire de la tache d'Airy d'un dispositif diffractant vaut : $\alpha = \lambda/a$, avec a la largeur de l'ouverture du dispositif et λ la longueur d'onde du rayonnement. Dans un dispositif de fentes d'Young, la largeur angulaire de l'interfrange vaut $\beta = \lambda/D$, avec D la distance entre les trous.

11.1.1 Radar

Un radar panoramique émet des impulsions de 10 μs à la fréquence de 4 GHz. L'antenne est rectangulaire de dimensions 5 m (horizontal) par 1 m (vertical), et tourne autour d'un axe vertical.

11.1.1.1 Calculer les dimensions du lobe d'émission de cette antenne.

11.1.1.2 Quelle taille fait le faisceau à $1\ km$ du radar ?

11.1.1.3 Le champ électrique mesuré à cette distance vaut $10\ V/m$; déduisez-en la puissance du radar.

11.1.2 Interférométrie à très longue ligne de base

Une antenne VLBI de $20\ m$ de diamètre est utilisée pour détecter des rayonnements extra-galactiques à la longueur d'onde démission de l'hydrogène $\lambda = 21\ cm$.

11.1.2.1 Calculer le pouvoir séparateur de l'antenne à cette longueur d'onde

11.1.2.2 On fait interférer les ondes détectées par deux antennes situées à $8000\ km$ de distance, sur la Terre ; calculer le pouvoir séparateur de l'interféromètre.

11.2 Champs

Pour simplifier les calculs, on prendra $c = 3 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$.

11.2.1 Sphère radioactive

Une sphère radioactive, de rayon R, émet des particules chargées de façon isotrope dans l'espace. On note $Q(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r $(r > R)$.

11.2.1.1 Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive. Calculer le vecteur densité de courant volumique à la distance r.

11.2.1.2 Les résultats précédents sont-ils en accord avec l'équation $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$? Commenter.

11.2.2 Propagation d'une onde

Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement suivant l'axe (Ox) se propage dans le vide dans la direction des z croissants. L'amplitude du champ électrique est $e_m = 0,3\ V \cdot m^{-1}$ et sa fréquence $f = 150\ MHz$.

11.2.2.1 Calculer la longueur d'onde et l'amplitude du champ magnétique.

11.2.2.2 Trouver les expressions des champs électrique et magnétique sachant que la valeur maximale du champ électrique est atteinte au point $z = 25\ cm$ à $t = 0$.

11.2.2.3 Quelle est puissance mesurée par un détecteur de $4\ cm^2$ placé perpendiculairement au vecteur de Poynting ?

11.2.3 Superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques

Une onde plane progressive monochromatique électromagnétique de pulsation se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est :

$$\overrightarrow{k_1} = k_1 (\cos\alpha \overrightarrow{e_x} + \sin\alpha \overrightarrow{e_z})$$

Elle est polarisée rectilignement, le champ $\overrightarrow{E}$ étant parallèle à (Oy) :

$$\overrightarrow{E_1} = E_0 \cos(\omega t - \overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r}) \overrightarrow{e_y}$$

11.2.3.1 Représenter graphiquement cette onde. Que vaut k_1 ? Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?

Une deuxième onde, de mêmes fréquence, amplitude et polarisation, dont le vecteur d ?onde est :

$$\overrightarrow{k_2} = k_2 (\cos\alpha \overrightarrow{e_x} - \sin\alpha \overrightarrow{e_z})$$

est superposée à la première. Ces deux ondes sont en phase à l'origine du système de coordonnées cartésiennes utilisé.

11.2.3.2 Représenter graphiquement cette onde.

11.2.3.3 Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale. La superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques est-elle une onde plane progressive monochromatique ?

11.2.4 Rayonnement d'une ampoule

On considère une ampoule émettant un rayonnement lumineux isotrope d'une puissance totale de 50 W. On suppose que l'onde émise est localement plane.

11.2.4.1 Calculez la valeur du champ électrique à 1 m et 5 m.

11.2.4.2 Quelle est la puissance mesurée par un détecteur de 1 cm^2 de surface à 1 m et 5 m ?

11.2.5 Puissance des signaux GPS (extrait de la composition 2013 – 2014)

La puissance de la porteuse L1 (de longueur d'onde 19,4 cm) du GPS est de 500 W à l'émission. Après avoir parcouru environ 20 000 km, le signal GPS est mesuré par une antenne isotrope. Le but de l'exercice est d'évaluer la puissance mesurée au niveau de l'antenne réceptrice.

On suppose que :

— la propagation de l'onde est à symétrie sphérique ; elle se fait dans le vide selon le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$;

— la porteuse des signaux GPS est modélisée par une onde sphérique : le champ électrique se présente sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{E_m}}{r} \exp\left[-i\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)\right]$$

où $\overrightarrow{E_m}$ est le vecteur d'amplitude, orthogonal au vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$;

— la relation de transversalité est vérifiée :

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{\omega}\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}$$

— la puissance mesurée par une antenne réceptrice est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}_m = \Pi_m \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

où Π_m est la norme du vecteur de Poynting moyen ($\left\|\left\langle\overrightarrow{P}\right\rangle_t\right\|$) de l'onde au point de mesure, λ, la longueur d'onde du signal ;

— la puissance d'une onde, en raison de sa faiblesse, est exprimée en dBW ; celle-ci à la puissance en W par la relation :

$$\mathcal{P}[\text{dBW}] = 10\log\frac{\mathcal{P}[\text{W}]}{\mathcal{P}_0[\text{W}]}$$

où $\mathcal{P}_0 = 1\ W$, log est le logarithme de base 10.

11.2.5.1 Montrer que le vecteur de Poynting moyen se formule sous la forme :

$$\left\langle \overrightarrow{P} \right\rangle_t = \frac{|E_m|^2}{2\omega\mu_0 r^2} \overrightarrow{k}$$

11.2.5.2 Montrer que la puissance totale du signal émis s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi k |E_m|^2}{\omega\mu_0}$$

11.2.5.3 Le seuil de détectabilité du signal par un récepteur bas de gamme est de $-160dBW$. Est-ce suffisant ?

11.2.6 Poussée exercée par le rayonnement

Un photon d'énergie $h\nu$ possède une impulsion (ou quantité de mouvement) $p = h\nu/c$.

11.2.6.1 Quelle densité volumique n de photons peut-on associer à une onde plane progressive monochromatique électromagnétique, se propageant dans le vide, dont le champ électrique est noté $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} cos(\omega t - kz)$?

11.2.6.2 Vérifier que ce résultat est analogue à celui obtenu en associant au champ électromagnétique une impulsion volumique $\overrightarrow{g} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$.

11.2.6.3 L'onde progressive est réfléchie par une sphère parfaitement conductrice, de centre O et de rayon R. Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ exercée par les photons qui rebondissent sur la sphère.

11.2.6.4 Comparer le résultat obtenu avec celui que donnerait l'interaction de l'onde incidente avec une sphère parfaitement absorbante.

11.2.6.5 Application numérique : Calculer F pour une bille métallique de rayon $R = 1mm$, subissant l'influence d'un faisceau laser de section cylindrique de rayon R et de puissance $\langle \mathcal{P}_m \rangle$ égale à $1mW$. Ce faisceau vous semble-t-il capable de maintenir en lévitation la bille ? Sinon, quel rayon faudrait-il donner à la bille pour que cela devienne envisageable ?

11.2.7 Cavité résonante

Une cavité a la forme d ?un parallélépipède rectangle dont les côtés $OA = a$, $OB = b$ et $OC = d$ sont portés par (Ox), (Oy) et (Oz), O étant un sommet. Les parois de cette cavité vide sont faites d ?un métal parfait.

11.2.7.1 Trouver la relation reliant k_1, k_2 et k_3 pour que le champ $\overrightarrow{E}$ satisfasse à l'équation de propagation dans le vide, sachant que ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(k1x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \sin(k_3 z + \phi_3) \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(k1x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \sin(k_3 z + \phi_3) \cos \omega t \\ E_z &= E_3 \cos(k1x + \phi_1) \sin(k_2 y + \phi_2) \sin(k_3 z + \phi_3) \cos \omega t \end{aligned}$$

11.2.7.2 Établir une relation entre k_1, k_2 et k_3, et E_1, E_2 et E_3.

11.2.7.3 Déterminer les valeurs possibles de ω pour que $\overrightarrow{E}$ satisfasse aux conditions aux limites. On exprimera ω en fonction de trois entiers n_1, n_2 et n_3. On obtient ainsi les pulsation propres de la cavité. Calculer la plus petite pulsation propre, en considérant que $a < b < d$.

11.2.7.4 Déterminer le champ magnétique dans la cavité. Satisfait-il aux conditions aux limites ?

11.2.8 Rayonnement d'une antenne demi-onde

On rappelle que l'expression du champ de rayonnement en $r \gg \lambda$ d'un dipôle placé à l'origine du système de coordonnées est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) &= c\overrightarrow{B}\overrightarrow{e_r} \\ \text{avec :} \qquad \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dddot{\overrightarrow{p}}(t-r/c)\wedge\overrightarrow{e_r}}{rc} \end{aligned}$$

Une antenne est constituée d'un fil d'épaisseur négligeable, de centre O et de longueur L, coïncidant avec l'axe (Oz), auquel un système électronique impose un courant oscillant :

$$i(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\omega t$$

soit en notation complexe :

$$\underline{i}(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{j\omega t}$$

On observe le rayonnement de cette antenne en un point M, repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ).

11.2.8.1 Expliquer l'expression du courant $i(z,t)$ dans l'antenne. Indiquer la relation liant la longueur L de l'antenne et la longueur d'onde λ associée au courant $i(z,t)$.

11.2.8.2 Dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$), peut-on supposer aussi que la longueur d'onde est très grande devant les dimensions de la source, comme dans le cas du rayonnement dipolaire ? Déterminer le champ $\overrightarrow{dE}$ créé en M par un élément de longueur dz situé en un point P d'abscisse z de l'antenne, puis son amplitude complexe.

11.2.8.3 Calculer le champ électrique complexe complet rayonné au point M.

11.2.8.4 Montrer que le vecteur de Poynting moyen peut se mettre sous la forme $Kf(\theta)\overrightarrow{r}/r^3$, où $f(\theta)$ (fonction dont la valeur maximale est 1) est appelée indicatrice de rayonnement de l'émetteur.

11.2.8.5 Donner l'allure du diagramme de rayonnement de l'antenne.

11.2.8.6 Calculer la puissance moyenne totale rayonnée $\langle\mathcal{P}\rangle$, ainsi que la résistance de rayonnement R de l'antenne, définie par $\langle\mathcal{P}\rangle = RI_0^2/2$. Calculer I_0 pour une antenne qui rayonne une puissance moyenne de $1kW$.

11.3 Milieux diélectriques

11.3.1 Puissance moyenne dissipée dans le modèle de la charge élastiquement liée

11.3.1.1 En repartant de l'équation du mouvement de la charge montrer que la puissance fournie par le champ électrique fait varier l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de cette charge mais est aussi dissipée.

11.3.1.2 Quelle est alors la puissance moyenne dans le temps $\mathcal{P}$ dissipée par unité de volume ? L'exprimer en fonction du champ électrique, de sa pulsation et de la partie imaginaire de la susceptibilité.

11.3.1.3 On sait que la puissance volumique est $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}$. Vérifier que l'on a bien ici $\mathcal{P} = \langle\overrightarrow{j}_{pol}\cdot\overrightarrow{E}\rangle$.

11.3.2 Propagation d'un paquet d'ondes dans le verre

Un verre d'utilisation courante a pour indices :
— $n_1 = 1,522$ pour la longueur d'onde bleue $\lambda_1 = 486nm$;
— $n_2 = 1,514$ pour la longueur d'onde rouge $\lambda_2 = 656nm$.

Dans ce domaine, le verre est totalement transparent aux ondes lumineuses.

11.3.2.1 Évaluer l'ordre de grandeur de la dérivée $dn/d\lambda$.

11.3.2.2 À partir de la relation de dispersion $k = n\omega/c$ entre le nombre d'onde k et la pulsation ω, trouver une relation entre la vitesse de groupe v_g, la vitesse de phase v_φ, n et ω, puis entre v_g, v_φ, n et λ.

11.3.2.3 Calculer l'ordre de grandeur de la distance d que doit parcourir un paquet d'?ondes de longueur d'?onde moyenne λ_0 (comprise entre λ_1 et λ_2) pour que la phase de l'onde varie de π au maximum du paquet (on pourra désigner par n_0 l'indice du verre pour la longueur d'onde λ_0).

11.3.3 Le rôle de la couche d'ozone stratosphérique (extrait de la composition 2015 – 2016)

NB : cette partie est inspirée de l'épreuve de physique du concours interne de l'agrégation de sciences physique, session 2010 (partie B).

La diminution de la couche d'ozone stratosphérique est due à l'émission de gaz chlorofluorocarbone (CFC). Les rayons ultraviolets sont alors moins bien interceptés dans la haute atmosphère et l'énergie solaire arrive davantage au sol. Il en résulte un réchauffement de la basse atmosphère. Un autre inconvénient introduit par la diminution de la couche d'ozone dans la haute atmosphère est aussi de laisser passer les ultraviolets proches, lesquels sont nocifs pour la peau.

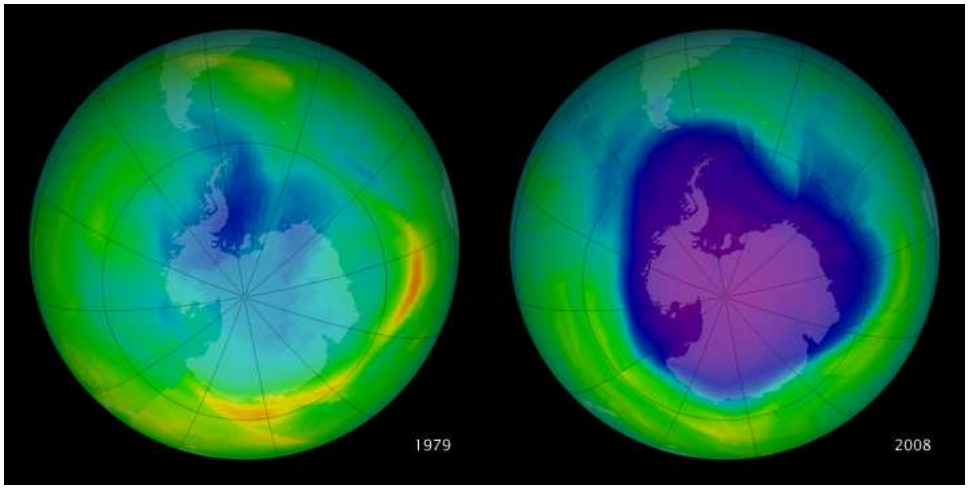


Figure 11.1 – Cartes de la densité de l'ozone atmosphérique au dessus de l'Antarctique en 1979 et 2008.

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, issue du Soleil, dans la couche d'ozone de la stratosphère. On considère l'ozone comme un diélectrique linéaire, homogène et isotrope. On néglige la polarisabilité d'orientation et on ne tient donc compte que de la polarisabilité moléculaire. On néglige aussi les effets de la pesanteur.

On suppose que la couche d'ozone occupe le demi-espace $z > 0$. Le champ électrique de l'onde qui s'y propage est noté en complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \overrightarrow{u_x}$$

Sous l'action de ce champ, les molécules d'ozone O_3 se polarisent. On envisage le modèle de l'électron élastiquement lié dans lequel on étudie un seul électron par molécule d'ozone. Cet électron, de charge $-e$ et masse m, situé en un point M, est élastiquement lié au centre O, fixe, de la molécule. On note $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$, et le cas échéant, en complexe :

$$\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r_0}} e^{i\omega t}$$

Cet électron est soumis à trois forces :
- une force d'interaction avec l'onde électromagnétique ;
- $\overrightarrow{f_A} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ où ω_0 est une pulsation propre caractéristique du mouvement de l'électron ;
- $\overrightarrow{f_B} = -m\Omega\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$.

11.3.3.1 À quels phénomènes physiques correspondent les forces $\overrightarrow{f_A}$ et $\overrightarrow{f_B}$? Quelle est la dimension de Ω ?

11.3.3.2 On ne tient pas compte de la force magnétique qu'exerce l'onde sur l'électron ; pourquoi ?

11.3.3.3 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron. Les équations étant linéaires, on utilise la notation complexe. En déduire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position $\overrightarrow{r}$ (complexe) de l'électron. Déterminer $\overrightarrow{r}$ (complexe) qu'on exprimera notamment en fonction de $\overrightarrow{E}$ (complexe).

11.3.3.4 En déduire le moment dipolaire induit $\overrightarrow{p}$ (complexe) ainsi que la polarisation $\overrightarrow{P}$ (complexe) de la stratosphère. On note n_p la densité particulaire d'ozone dans la stratosphère.

11.3.3.5 Le milieu n'est pas magnétique et est globalement neutre. Écrire les équations de Maxwell reliant les champs $\overrightarrow{E}$ (complexe) et $\overrightarrow{B}$ (complexe) et les densités de charge et de courant de polarisation du milieu ρ_P et $\overrightarrow{j_P}$.

11.3.3.6 Les champs n'étant fonction que de z et de t, en déduire l'équation :

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{P}}{\partial t^2}$$

11.3.3.7 Déduire de l'équation obtenue à la question précédente écrite sous forme complexe et de l'expression de la polarisation $\overrightarrow{P}$ (complexe), l'expression de k^2 (complexe). On posera :

$$\omega_p^2 = \frac{n_p e^2}{m\epsilon_0}$$

11.3.3.8 L'indice complexe est défini par $n(\omega) = \frac{c}{\omega}k$ (complexe). En déduire n^2 (complexe).

En notant $\underline{n} = n_1 - in_2$, compte-tenu d'une approximation dont on ne se préoccupe pas ici, on admet les expressions respectives de n_1 et n_2 :

$$n_1 = 1 + \frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{2\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Omega^2\omega^2\right)}$$
$$n_2 = \frac{\Omega\omega\omega_p^2}{2\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Omega^2\omega^2\right)}$$

11.3.3.9 Quelle est l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ (observable) en fonction notamment de n_1 et n_2 ? Comment appelle-t-on n_1 et n_2 ? Justifier.

11.3.3.10 Constater qu'il apparaît un terme d'atténuation et en déduire la distance caractéristique δ du phénomène en fonction de c, ω et n_2.

11.3.3.11 On donne $\omega_0 = 7,4\cdot10^{15}rad\cdot s^{-1}$ la pulsation centrale de la bande d'absorption de l'ozone. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe ω_0 ? On donne $\Omega = 10^{14}rad\cdot s^{-1}$ ainsi que la densité particulaire maximum d'ozone dans la stratosphère $n_p = 4\cdot10^{18}m^{-3}$. Calculer δ pour les deux fréquences suivantes :

— f_0 **correspondant à la longueur d'onde dans le vide** $\lambda_0 = 250\ nm$;

— **f correspondant à la longueur d'onde dans le vide** $\lambda = 600\ nm$**.**

Conclure : pourquoi est-il important de maintenir la couche d'ozone stratosphérique ?

11.4 Milieux conducteurs

11.4.1 Propagation dans un milieu conducteur

On considère un milieu conducteur de conductivité σ, de perméabilité μ_0 et de permittivté ϵ_0. Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement suivant l'axe (Ox) s'y propage dans la direction des z croissants, telle que :

$$\overrightarrow{E} = Ee^{-i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x}$$

En raison de sa conductivité, un courant surfacique $\overrightarrow{J}$ est créé dans le milieu en raison de la propagation du champ électrique :

$$\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}$$

11.4.1.1 Écrire les équations de Maxwell dans ce milieu en utilisant le formalisme complexe.

11.4.1.2 À partir des équations de Maxwell, déduire la relation de dispersion de la propagation dans ce milieu.

11.4.1.3 On se place dans le cas où $\sigma \gg \omega\epsilon_0$. On note $\delta^2 = \frac{2}{\mu_0\sigma\omega}$. Exprimer k en fonction de δ.

11.4.1.4 Formuler les champs électrique et magnétique. Quel constat peut-on faire sur leurs amplitudes ?

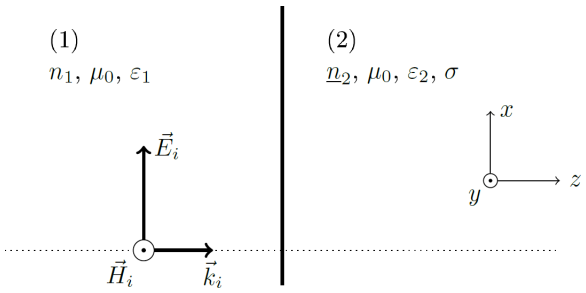
11.4.1.5 Quelles fréquences privilégier pour les communications sous-marines sachant que la conductivité de l'eau de mer est de l'ordre de $4,5\ S\cdot m^{-1}$. Que vaut δ pour les fréquences utilisées en GPS ($f \approx 1,5\ GHz$) ? Que peut-on conclure ?

11.4.2 Navigation par satellites et ionosphère

Soit une onde monochromatique polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$ et se propageant selon l'axe (Oz) (z croissant) dans un milieu idéal (1) d'indice de réfraction n_1 et rentrant en incidence normale avec une surface plane infinie, séparant le milieu (1) idéal d'un milieu (2) quasi idéal, car dispersif, absorbant et conducteur, de conductivité σ et d'indice complexe $\underline{n}_2 = n_2 + i\kappa_2$. Les deux milieux ne sont ni chargés, ni parcourus par des courants, ni magnétiques ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). La surface séparatrice entre les 2 milieux ne présente pas de courant surfacique. On formalise le champ électrique de cette onde incidente sous la forme :

$$\overrightarrow{E_i} = E_{m,i}\exp\left[-i(\omega t - k_i z)\right]\overrightarrow{u_x}$$

$\overrightarrow{k_i}$ est son vecteur d'onde.



On note $\overrightarrow{E_r}$ et $\overrightarrow{E_t}$ les champs réfléchis et transmis, $E_{m,r}$ et $E_{m,t}$ leurs amplitudes et $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ leurs vecteurs d'ondes[1].

11.4.2.1 Réflexion et transmission de l'onde incidente

a) Écrire les relations de continuité au voisinage de la surface séparatrice entre les 2 milieux pour les champs électriques et magnétiques.

b) En utilisant la relation de transversalité du champ électromagnétique, reformuler ces relations en fonction des champs électriques et des vecteurs d'onde uniquement.

c) Expliciter la formulation des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ en fonction de k_0 et des indices de réfraction.

On appelle ρ et τ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude définis par :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E_{m,r}}{E_{m,i}} \\ \tau &= \frac{E_{m,t}}{E_{m,i}} \end{aligned}$$

d) Montrer que ces coefficients s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} \\ \tau &= \frac{2n_1}{n_1 + \underline{n}_2} \end{aligned}$$

On appelle R et T les coefficients de réflexion et de transmission en puissance définis par :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i} \\ \text{et} \quad T &= \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i} \end{aligned}$$

e) À partir de la formulation des vecteur de Poynting, montrer que ces coefficients s'écrivent sous la forme :

$$R = |\rho|^2 \qquad T = \frac{n_2}{n_1}|\tau|^2$$

11.4.2.2 Relation de dispersion dans le milieu 2

Sous l'action du champ magnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$, un courant $\overrightarrow{J}$ est créé dans le milieu 2 :

$$\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}$$

a) Formuler les équations de Maxwell en régime harmonique dans le milieu (2).

b) Montrer que la relation de dispersion de ce milieu s'écrit sous la forme :

$$k_t^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \cdot \left(\varepsilon_2 + i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

1. On rappelle que les nombres d'onde sont reliés au nombre d'onde du vide par : $k = nk_0$.

11.4.2.3 Transition vide - plasma

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide et rentrant en incidence normale avec un plasma dont la permittivité électrique est égale à celle du vide : $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Un plasma est un milieu composé de particules chargées libres et dont on peut modéliser le comportement conducteur par une conductivité complexe donnée par :

$$\sigma = i\frac{n_e e^2}{m_e \omega}$$

où n_e est la densité en électrons du plasma sur le trajet de l'onde, e leur charge élémentaire et m_e leur masse.

a) Formuler le nombre d'onde k_t en fonction de $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$; ω_p est la pulsation de plasma. En déduire que l'indice complexe du plasma s'écrit :

$$\underline{n}_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

b) Dans les deux cas suivants, formuler les coefficients de transmission et de réflexion en puissance et commenter la propagation de l'onde dans le plasma : $\omega < \omega_p$, puis $\omega > \omega_p$.

11.4.2.4 Application à la propagation des signaux GPS dans l'ionosphère

L'ionosphère est la couche supérieure de l'atmosphère terrestre, que l'on peut assimiler à un plasma. On considère une onde électromagnétique se propageant dans l'espace et rentrant en incidence normale avec l'ionosphère.

a) La pulsation de plasma de l'ionosphère est de l'ordre de $2 \times 10^7\ rad \cdot s^{-1}$ en moyenne. Une des fréquences utilisées par GPS est de l'ordre de $1,5\ GHz$. Qu'en est-il de la propagation des signaux GPS dans l'ionosphère ?

b) Formuler les vitesses de groupe et de phase v_g et v_φ. En déduire les indices de groupe et de phase définis par :

$$n_g = \frac{c}{v_g}$$
$$n_\varphi = \frac{c}{v_\varphi}$$

c) En faisant un développé limité d'ordre 1, montrer que ces indices peuvent se limiter à une formulation de type $n = 1 \pm a \times \frac{n_e}{f^2}$ où a est une constante et f la fréquence du signal. Que vaut cette constante ?

d) En écrivant la distance mesurée entre un satellite GNSS et un récepteur au sol affectée du biais ionosphérique, montrer que la combinaison linéaire L_3 est libre du délai ionosphérique.

11.4.3 Onde électromagnétique le long d'un conducteur parfait

Une onde progressive électromagnétique se propage parallèlement à un plan conducteur parfait. La surface plane du conducteur est le plan (xOy). Le métal est semi-infini, et occupe la zone $(y0)$. Le champ électrique est de la forme :

$$\overrightarrow{E} = f(y)cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$$

11.4.3.1 Caractériser la forme générale acceptable du champ électromagnétique correspondant à des solutions de ce type.

11.4.3.2 Quelles sont les charges et courants portés par le conducteur parfait ?

11.4.3.3 Définir et calculer la vitesse de propagation de l'énergie.

11.4.4 Propagation de l'énergie dans un plasma peu dense

On considère un plasma peu dense contenant n électrons par unité de volume et on étudie la propagation d'une onde plane progressive monochromatique selon les z croissants de pulsation $\omega > \omega_p$ et polarisée suivant l'axe (Ox).

11.4.4.1 Donner l'expression des champs électrique et magnétique et du vecteur de Poynting.

11.4.4.2 Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique et d'énergie cinétique des électrons.

11.4.4.3 En déduire la vitesse de propagation de l'énergie. La comparer à la vitesse de groupe.

11.5 Physique quantique

11.5.1 Puissance d'un laser

Un laser Nd :YAG émet des impulsions de 5 ns et d'énergie de 100 mJ à $\lambda = 1064\ nm$.

11.5.1.1 Calculer le nombre de photons émis par impulsion.

11.5.1.2 Quelle est la puissance « crête » d'une impulsion ?

11.5.1.3 Le laser tire à une cadence de $20\ Hz$. Quelle est la puissance moyenne émise ?

11.5.1.4 On place à la sortie du faisceau un doubleur de fréquence de rendement 50%. Calculer le nombre de photons émis à la nouvelle longueur d'onde.

11.5.2 Atome d'hydrogène

11.5.2.1 Quelle est la longueur d'onde d'un photon absorbé à l'occasion du passage de niveau fondamental de l'électron de l'hydrogène ($n = 1$) au niveau $n = 2$?

11.5.2.2 Un proton et un électron, initialement infiniment éloignés, s'assemblent au niveau fondamental de l'atome d'hydrogène ; quelle est la longueur d'onde du photon émis ?

11.5.3 Durée de vie d'un état excité d'un atome

On adopte ici un modèle planétaire de l'atome pour lequel l'électron d'un atome d'hydrogène est assimilé à une particule de masse m et de charge $-e$ qui gravite sur une trajectoire circulaire de rayon R autour d'un proton, considéré comme infiniment massif, fixe à l'origine O.

11.5.3.1 Exprimer en fonction de R, m et e, la vitesse v, l'accélération a de l'électron, la période T et l'énergie mécanique E du système. Les évaluer pour $R = 53pm$, et discuter le caractère relativiste ou non de l'électron.

À une distance r très grande devant l'extension spatiale R de son mouvement, une particule non relativiste, de charge q et d'accélération a, émet un champ électromagnétique de rayonnement, dont le champ magnétique est :

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\overrightarrow{a}(t-r/c)\wedge\overrightarrow{e_r}}{rc}$$

11.5.3.2 Discuter la polarisation de l'onde émise dans le plan de l'orbite de l'électron ou sur son axe de révolution.

11.5.3.3 Établir la formule de Larmor donnant la puissance rayonnée par l'électron décrivant sa trajectoire circulaire.

11.5.3.4 Quelle est la conséquence de cette émission de rayonnement sur le mouvement de l'électron ? Discuter la rapidité de cette évolution en évaluant le rapport entre l'énergie rayonnée pendant une révolution et l'énergie mécanique obtenue précédemment.

On rappelle que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la loi de quantification :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ eV$$

où n désigne le nombre quantique principal.

11.5.3.5 En utilisant les conclusions précédentes, proposer une loi d'évolution du rayon R de la trajectoire électronique en fonction du temps. En déduire une évaluation de la durée de vie τ du niveau excité $2p$ de l'atome d'hydrogène, sachant que l'atome retombe, par émission de rayonnement, dans l'état $1s$. Comparer la valeur obtenue à la valeur expérimentale de ce temps de vie qui est $\tau = 1,6ns$.

11.5.4 Électrons

Un électron au repos dévie un photon d'énergie 1 MeV d'un angle de 45°.

11.5.4.1 Quelle est la nouvelle énergie du photon ? Sa longueur d'onde ?

11.5.4.2 Quelle est l'énergie cinétique acquise par l'électron ?

11.5.4.3 Quelle est la vitesse de l'électron ?

11.5.4.4 Que vaut l'angle donnant la direction dans laquelle l'électron est mis en mouvement ?

11.5.4.5 Calculer la longueur d'onde associée à l'électron.

11.6 Flux, radiométrie, corps noir

11.6.1 Angles solides

11.6.1.1 Sur une sphère de rayon unité, on définit une surface entre les méridiens 0° et 15°, et entre les parallèles 20° et 50°. Calculer l'angle solide de cette surface.

11.6.1.2 Calculer le nombre de degrés carrés sur une demi-sphère.

11.6.1.3 La Pleine Lune a un diamètre angulaire apparent de 0,5° ; calculer le nombre de Pleines Lunes que l'on pourrait mettre à la surface d'un hémisphère céleste.

11.6.2 Fond de ciel

Le fond de ciel est assimilé à une source hémisphérique lambertienne de luminance $L = 4 \cdot 10^3 cd \cdot m^{-2}$.

11.6.2.1 Exprimer cette luminance en $W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$.

11.6.2.2 Calculer l'éclairement au sol produit par le fond de ciel.

11.6.3 Impulsion du champ électromagnétique

Le champ électrique d'une onde plane sinusoïdale qui se propage dans le vide dans la direction de l'axe (Oz) a la forme suivante :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}$$

11.6.3.1 Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ oscillant associé, dans cette onde, au champ électrique précédent. Montrer que la compatibilité du champ de l'onde avec les équations de Maxwell dans le vide impose une relation entre k et ω (on prendra $k > 0$, pour une propagation à z croissant).

11.6.3.2 Quelle est la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de cette onde ?

11.6.3.3 La grandeur $\overrightarrow{g} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$ est appelée impulsion volumique du champ (ou quantité de mouvement par unité de volume). L'unité de cette grandeur est-elle en accord avec cette définition ?

Dans un modèle corpusculaire, on associe à cette onde un faisceau de photons se déplaçant à la vitesse c de l'onde. On rappelle qu'un photon est une particule (relativiste) de masse nulle, d ?énergie :

$$E = h\nu$$

(où $\nu = 2\pi/\omega$ représente la fréquence de l'onde) et d'impulsion, ou quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} p &= \frac{E}{c} \\ &= \frac{h\nu}{c} \end{aligned}$$

11.6.3.4 Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ? En déduire l'expression de l'impulsion volumique associée à l'onde et vérifier qu'elle s'identifie bien à la moyenne temporelle de la grandeur $\overrightarrow{g}$ définie à la question précédente

.

11.6.4 Pression de radiation

L'éclairement solaire annuel moyen sur Terre est de 340 $W \cdot m^{-2}$. On appelle pression de radiation la force s'exerçant sur une surface de 1 m^2 et due à la réflexion du rayonnement électromagnétique incident. Cette pression est donnée par :

$$P_r = \frac{2}{c} \langle P \rangle_t$$

Comparer à la pression atmosphérique (environ $1000hPa$) la pression de radiation qui s'exerce sur un miroir placé à la surface de la Terre perpendiculairement au rayonnement solaire.

11.6.5 Lampe de poche

11.6.5.1 Dispositif

On considère une ampoule assimilée à une source ponctuelle, avec une puissance de 250 mW. Par un jeu de surfaces réfléchissantes, elle émet l'intégralité de ce flux vers une plaque de géométrie circulaire d'un matériau diffusant en transmission de rayon $r_p = 2\ cm$, située à une distance $d_p = 2\ cm$ et sur l'axe de la plaque.

a) Calculer l'éclairement reçu par la plaque.

b) Calculer l'intensité du rayonnement de l'ampoule.

11.6.5.2 Illumination par la lampe

La plaque de transmission étant diffusante, on la suppose lambertienne.

a) Calculer l'émittance de la plaque.

b) Calculer la luminance de la plaque.

Un récepteur circulaire de rayon $r_r = 5\ cm$ est situé à une distance $d_r = 25\ cm$ de la plaque, dans une direction faisant un angle $\alpha = 30°$ avec la normale à la plaque, et avec une orientation telle que sa normale fait un angle $\theta = 40°$ avec la direction liant le centre de la plaque au centre du récepteur.

c) Calculer le flux reçu par le récepteur.

d) Calculer l'éclairement reçu par le récepteur.

e) Calculer l'intensité du rayonnement de la plaque dans la direction du récepteur.

11.6.6 Observation d'un astre sphérique

NB : exercice inspiré de [Boissé, 2003].

On considère une étoile sphérique de rayon $R_\star$, de centre C, de surface lambertienne, observée en un point O à une distance r du centre de l'étoile. L'objectif de cet exercice est d'exprimer l'éclairement reçu avec plusieurs méthodes.

11.6.6.1 Exprimer la luminance observée en fonction de l'angle θ que fait la direction visée et la droite (OC).

11.6.6.2 En déduire l'éclairement $\mathcal{E}_O(r)$ reçu en O ; vérifier que la relation obtenue est cohérente avec ce qu'on obtiendrait en $r = R_\star$.

11.6.6.3 Calculer le flux total Φ émis par l'étoile ; en déduire l'éclairement $\mathcal{E}_O(r)$ reçu en O. Le comparer à l'expression obtenue à la question précédente.

11.6.6.4 Recalculer l'éclairement $\mathcal{E}_O(r)$ reçu en O à partir de la luminance reçue, puis à partir du flux total émis, en supposant maintenant que la surface de l'étoile n'est plus lambertienne mais émet une luminance $L(\alpha)$ où α est l'angle entre la direction d'émission et la normale à l'élément de surface considéré.

11.6.7 Constante solaire

On rappelle que le rayonnement solaire a pour origine la transformation par fusion nucléaire d'environ 619 millions de tonnes d'hydrogène en 614 millions de tonnes d'hélium chaque seconde, libérant une énergie correspondant à la perte de $\Delta m = 4,26$ millions de tonnes de matière par seconde. D'un rayon moyen $r_S \approx 696\ 000\ km$, le soleil est situé à une distance moyenne $d = 149\ 637\ 000\ km$ de la Terre. On assimile le Soleil à un corps noir.

11.6.7.1 En utilisant la relation relativiste $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ (où ΔE est l'énergie générée) applicable à la perte de masse par fusion nucléaire Δm, trouver le flux total rayonné par le Soleil.

11.6.7.2 En déduire la température de surface du Soleil.

11.6.7.3 Calculer la longueur d'onde correspondant au pic d'émittance.

11.6.7.4 Exprimer La formulation de l'éclairement solaire au sommet de l'atmosphère en fonction de sa luminance, L_S et de son demi-diamètre apparent, θ_S.

11.6.7.5 Calculer sa valeur (appelée constante solaire).

On considère une transmission atmosphérique de l'ordre de 0,7.

11.6.7.6 Calculer la magnitude du Soleil.

11.6.7.7 Quelle est la valeur de l'éclairement solaire au sol au cours d'une rotation diurne de la Terre ?

11.6.7.8 On suppose que l'albédo de la Terre est de $0,3$; en supposant qu'elle est à l'équilibre thermique, quelle est la température de la Terre si on l'assimile à un corps noir ? Commentez ce résultat.

11.6.8 Observation d'astres du Système solaire

On suppose que la Lune est lambertienne, que l'éclairement solaire incident moyen est le même que celui incident à la Terre et que son albédo est de 0,07. On rappelle que le rayon de la Lune est de 1500 km et que la distance Terre – Lune est d'environ 400 000 km.

11.6.8.1 Pleine Lune

a) Calculer la luminance de la surface de la Lune.

b) Lorsque la Lune est pleine, quel est l'éclairement moyen sur la surface terrestre éclairée par le clair de Lune ?

c) Calculer la magnitude de la Pleine Lune. La comparer à la magnitude du fond de ciel.

11.6.8.2 Lumière cendrée de la Lune

Juste après la Nouvelle Lune, notre satellite se présente aux observateurs terrestres sous la forme d'un mince croissant (la part de la surface lunaire éclairée par le Soleil et vue depuis la Terre). On aperçoit cependant la partie de la Lune non éclairée par le Soleil, qui est éclairée la lumière solaire réfléchie par la Terre.

On suppose que la part de Terre éclairée par le Soleil vue depuis la Lune est de 80% et que la Terre a un albédo de 0,3.

a) Calculer l'éclairement solaire réfléchi par la Terre et reçu par la Lune.

b) Calculer l'éclairement de la lumière cendrée de la Lune observée sur Terre. Le comparer à l'éclairement du fond de ciel.

11.6.8.3 À propos de la neuvième planète (extrait de la composition 2016 – 2017)

L'étude des orbites des corps transneptuniens a permis à des chercheurs du CALTECH de formuler l'existence d'une neuvième planète dans le système solaire [Batygin & Brown, 2016]. Sa distance au Soleil serait d'environ 700 UA et sa masse au minimum de 10 $m_\oplus$, ce qui en fait une planète gazeuse du type d'Uranus ; nous considérons donc désormais que la neuvième planète a les propriétés physique d'Uranus.

On donne :
- Uranus :
  - Rayon : $r_U = 25\ 500\ km$
  - Albédo : $\rho_U = 0,5$
- Terre :
  - Rayon : $r_\oplus = 6378\ km$
  - Distance au Soleil : $d_{\odot\oplus} = 1\ UA$
  - Éclairement reçu du Soleil (constante solaire) : $E_{\odot\to\oplus} = 1360,7\ W \cdot m^{-2}$
  - Transmittance moyenne de l'atmosphère terrestre : $T = 0,7$

a) Calculer l'éclairement reçu par la neuvième planète.

b) Calculer l'éclairement moyen reçu au sol de la neuvième planète.

c) Calculer la température de la neuvième planète.

d) Calculer l'émittance de la neuvième planète.

e) En considérant sa surface comme lambertienne, en déduire sa luminance.

f) Calculer l'éclairement provoqué par la neuvième planète au sommet de l'atmosphère terrestre.

g) Calculer la magnitude de la neuvième planète dans le visible, observée sur Terre, au sol.

h) La magnitude limite possible avec le Very Large Telescope étant de 30, peut-il détecter la neuvième planète ?

11.6.9 Bilan radiatif d'un capteur aérien

Cet exercice est divisé en deux parties : la première vise à calculer toutes les contributions de l'éclairement au sol dans le visible ; la deuxième envisage de calculer celle d'un capteur observant le sol, toujours dans le visible.

11.6.9.1 Bilan radiatif au sol

On suppose trois sources d'éclairement impactant la scène observée :
— L'éclairement direct provenant du Soleil, $\mathcal{E}_1$, la direction de celui-ci formant un angle θ_S avec la normale au sol ;
— L'éclairement solaire diffusé par l'atmosphère, $\mathcal{E}_2$;
— L'éclairement solaire réfléchi par le sol et rétrodiffusé par l'atmosphère, $\mathcal{E}_3$.

On note $T(\theta_S)$ la transmission atmosphérique ; elle dépend de l'angle zénithal du Soleil θ_S. On note D le coefficient de diffusion atmosphérique vers le bas ; si on suppose celle-ci isotrope, alors D est indépendant de toute considération angulaire et, pour une diffusion vers le bas, on a $D = 0,5$.

a) Formuler l'éclairement solaire incident $\mathcal{E}_i$ au sommet de l'atmosphère en fonction de l'éclairement solaire moyen $\mathcal{E}_S$.

b) Formuler l'éclairement direct au sol provenant du Soleil en fonction de l'éclairement solaire moyen $\mathcal{E}_S$ et de la transmission atmosphérique T.

c) Formuler l'éclairement solaire diffusé par l'atmosphère en fonction de l'éclairement solaire moyen $\mathcal{E}_S$ et du coefficient de diffusion vers le bas D.

d) Formuler l'éclairement du sol rétro-diffusé par l'atmosphère. On utilisera l'albédo terrestre ρ et l'albédo atmosphérique, s. Indication : mettre en évidence une série géométrique.

e) Formuler l'éclairement total, $\mathcal{E}_{\text{sol}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$. Calculer la valeur de chacune de ses composante et sa valeur sous les hypothèses suivantes :
— **L'éclairement solaire moyen est $\mathcal{E}_S = 340W \cdot m^{-2}$;**
— **La transmission est donnée par :**

$$T(\theta_S) \quad = \quad \exp\left[-\frac{\tau}{\cos\theta_S}\right]$$

où τ, l'épaisseur optique, peut être calculée à partir des coefficients de diffusion donnés dans le cours (absorption négligeable, longueur d'onde centrée sur $555\ nm$, visibilité de $23\ km$, pression sol standard).
— **Pour les albédos, on utilisera les valeurs $\rho = 0,3$ pour le sol et $s = 0,1$ pour l'atmosphère ;**
— **L'angle zénithal du Soleil est de $\theta_S = 60°$.**

11.6.9.2 Bilan radiatif au niveau du capteur

On calcule la luminance reçue au niveau d'un capteur observant la scène, en supposant le sol lambertien. La direction du capteur depuis le sol fait un angle θ_v par rapport à la normale au sol.

a) En se plaçant au niveau du sol, formuler la luminance émise par celui-ci en fonction de l'éclairement total incident $\mathcal{E}_{\mathbf{sol}}$, calculé dans la partie précédente, et de l'albédo du sol ρ.

b) Formuler la luminance directe L_4 provenant de la scène observée, en fonction de ρ, $\mathcal{E}_{\mathbf{sol}}$ et $T(\theta_v)$.

c) Formuler la luminance L_5 issue de l'éclairement terrestre diffusé par l'atmosphère en fonction de $\mathcal{E}_{\mathbf{sol}}$, de $T(\theta_v)$ et du coefficient de diffusion vers le haut, D.

d) Formuler la luminance L_6 issue de l'éclairement solaire diffusé par l'atmosphère en fonction de l'éclairement solaire moyen $\mathcal{E}_S$, de $T(\theta_S)$ et de l'albédo atmosphérique directionnel à θ_v d'un flux incident à θ_S, noté $\rho_A(\theta_S, \theta_v)$, en supposant l'atmosphère comme un diffuseur lambertien.

e) En déduire la formulation de la luminance totale $L_{\mathbf{tot}} = L_4 + L_5 + L_6$ et calculer sa valeur sous les mêmes hypothèses que précédemment sachant que l'angle zénithal du capteur est de 30°. On prendra $\rho_A(\theta_S, \theta_v) = 0,15$.

11.6.10 Radiomètre spatial

Un radiomètre imageur observe le sol au nadir depuis un satellite à une altitude $H = 1000$ km. Son objectif est de mesurer le rayonnement de la Terre autour de son maximum d'émission. Les caractéristiques de son optique sont les suivantes :

- Télescope de focale $f = 1\ m$ et de diamètre 50 cm ;
- Détecteur : CCD de pixel de 20 μm de coté, de sensibilité spectrale constante et centrée sur le maximum d'émission terrestre ;
- Bande passante du système : $\Delta\lambda = 2\ \mu m$.

La Terre est assimilée à un corps noir de température $T_T = 288\ K$ dont la surface est lambertienne d'albédo 0,3. La transmission atmosphérique au zénith est de 0,9 et de 0,8 à 60° d'angle zénithal. Le Soleil est assimilé à un corps noir de température $T_S = 5900\ K$. Il est observé pour un angle zénithal de 60°.

11.6.10.1 Déterminer la longueur d'onde centrale du détecteur ainsi que son angle solide de visée.

11.6.10.2 Quelles sont les luminances de la Terre et du Soleil dans la bande spectrale utile ? On supposera que la luminance spectrale de la Terre est constante sur la bande spectrale d'intérêt ; dans le cas du Soleil, quelle approximation de la fonction de Planck faut-il faire ?

11.6.10.3 Que valent les flux énergétiques émis par la Terre et émis par le Soleil réfléchis par la Terre et mesurés par un pixel du CCD ? Indication : Utiliser la loi de réciprocité en considérant que la source est l'objectif du système (la surface du télescope).

11.6.11 Bilan radiométrique d'un satellite Pléiades (extrait de la composition 2013 – 2014)

Le système Pléiades est composé de 2 satellites identiques (Pléiades 1A et Pléiades 1B) en orbite à 694 km au dessus de la Terre et en charge de l'observation de la Terre dans différentes bandes spectrales (panchromatique, bleu, vert, rouge et proche infra-rouge). Le but de cet exercice est de dresser un bilan radiométrique (approché) du système en *mode panchromatique*, c'est-à-dire dans la bande spectrale 470 nm – 830 nm.

Les caractéristiques de ces satellites sont les suivantes :

- Focale de $f = 12,905\ m$;

— Télescope de $D = 65\ cm$ de diamètre ;
— Pixel carré de $\Delta x = 13\ \mu m$ de coté en mode panchromatique.

Les hypothèses de travail sont les suivantes :
— On travaille dans la bande spectrale 470 nm – 830 nm ;
— On suppose que le capteur est éclairé :
  — Par le rayonnement solaire réfléchi par l'atmosphère ;
  — Par le rayonnement solaire réfléchi par la Terre, atténué par l'atmosphère ;
  — Par le rayonnement terrestre, atténué par l'atmosphère ;
— On assimile le Soleil à un corps noir de température $T_S = 5800\ K$; il éclaire la scène observée avec un angle zénithal $\theta_S = 50^\circ$. Son rayon est $r_S \approx 696\ 000\ km$ et il est situé à une distance $d_S = 149\ 637\ 000\ km$ de la Terre ;
— La Terre est supposée lambertienne, de réflectivité spectrale constante $\rho = 0,3$. Sa luminance est celle d'un corps noir de température $T_T = 288\ K$;
— Le satellite Pléiades considéré observe la scène d'intérêt au zénith ;
— Les épaisseurs optiques liées aux transmissions moléculaires et particulaires sont données par :

$$\begin{aligned} & \tau_P &=& \ 0,073 \\ \text{et} \quad & \tau_M &=& \ 0,164 \end{aligned}$$

— La dépendance de la transmission atmosphérique à l'angle d'incidence est modélisée par la masse d'air relative $M \approx 1/\cos\theta$ où θ est l'angle zénithal d'incidence ;
— La réflectivité apparente de l'atmosphère est donnée par :

$$\rho_a(\theta_S, \theta_C) \quad = \quad \frac{\pi}{16} \cdot \frac{[\tau_R + \tau_M] \cdot \left[1 + \cos^2(\pi - \theta_S - \theta_C)\right]}{\cos\theta_S \cos\theta_C}$$

où θ_S est l'angle zénithal du Soleil, θ_C celui du capteur.

11.6.11.1 En toute rigueur, quelles sont les différentes sources d'éclairement qui illuminent le capteur du satellite lorsque celui-ci observe une scène terrestre ?

11.6.11.2 Comment peut-on évaluer numériquement les luminances du Soleil et de la Terre sur la bande spectrale d'observation du système ? Ne pas faire le calcul

On prend pour la suite sur la bande spectrale du système les valeurs :

$$\begin{aligned} L_S &= 8,1 \times 10^6 W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} && \text{comme luminance du Soleil} \\ L_T &= 3,2 \times 10^{-20} W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} && \text{celle de la Terre} \end{aligned}$$

11.6.11.3 Justifier l'expression du flux mesuré au niveau du satellite Pléiades en fonction d'une luminance quelconque L :

$$\Phi \quad = \quad \pi L \frac{D^2}{4} \frac{(\Delta x)^2}{f^2}$$

11.6.11.4 Calculer le flux émis par la Terre et mesuré par le capteur panchromatique, Φ_T.

11.6.11.5 Calculer le flux émis par le Soleil, réfléchi par la Terre, et mesuré par le capteur panchromatique, Φ_S^T.

11.6.11.6 Calculer le flux émis par le Soleil, réfléchi par l'atmosphère, et mesuré par le capteur panchromatique, Φ_S^A. Commenter ces résultats.

11.6.12 Magnitudes stellaires et galactiques (extrait de la composition 2015 – 2016)

NB : partie inspirée des exercices suivants :
https://media4.obspm.fr/public/FSU/pages_luminosite/magnitude-apparente-apprendre.html (cours « Fenêtres sur l'Univers » proposés par l'Observatoire de Paris à partir de la page https://media4.obspm.fr/public/FSU/index.html

http://sci.esa.int/science-e/www/object/doc.cfm?fobjectid=36478 (exercices d'astronomie proposés par l'Agence spatiale européenne et l'Observatoire européen de l'hémisphère sud à partir de la page http://sci.esa.int/education/35011-exercises-in-astronomy/

11.6.12.1 Magnitude apparente

a) Deux étoiles ont des éclairements apparents E_A et E_B. Exprimer leur différence de magnitude.

b) En considérant que l'éclairement reçu décroît avec le carré de la distance, montrer que la différence entre la magnitude apparente m d'un astre situé à une distance d de la Terre, exprimée en parsecs, et sa magnitude absolue M s'exprime :

$$m - M \quad = \quad 5 \log d - 5$$

c) Comparer les flux d'objets de magnitudes $-26,7$ (Soleil), $-2,55$ (Jupiter), $+6$ (étoiles juste visibles à l'œil nu) et $+27$ (magnitude limite accessible au sol).

11.6.12.2 Performance de détection liée à la taille du récepteur

En vision nocturne, le diamètre de notre pupille vaut de l'ordre de 6 mm, et la magnitude limite visible à l'œil nu est $m = 6$.

a) Exprimer l'éclairement reçu E traversant la pupille, en fonction de Φ et D, respectivement la puissance totale reçue et le diamètre de la pupille.

b) Calculer E et Φ pour une étoile de magnitude 6.

c) Montrer qu'avec un collecteur de diamètre D, l'œil a accès aux magnitudes jusqu'à :

$$m(D) \quad = \quad m_0 + 5 \log D$$

avec D en mètres. Identifier m_0.

d) Calculer m pour $D = 6\ cm$, $D = 60\ cm$, $D = 6\ m$.

e) Comment procède-t-on pour observer les objets de magnitude supérieure ?

11.6.12.3 Détermination de la distance de la galaxie M100 à l'aide des étoiles variables Céphéides

La mesure de la distance d'un objet astronomique est très difficile et constitue l'un des plus grands défis lancés aux astronomes. Au cours des siècles, on a utilisé divers indicateurs de distance. L'un d'eux est une famille d'étoiles variables connues sous le nom de Céphéides.

Les Céphéides sont des étoiles rares et très lumineuses dont l'éclat varie périodiquement. Leur nom provient de δ-Céphée, étoile de la constellation de Céphée, premier exemple connu de ce type particulier d'étoiles variables et particulièrement facile à observer à l'œil nu.

En 1912, l'astronome Henrietta Leavitt observa 20 Céphéides dans le Petit Nuage de Magellan (SMC), qui est une petite galaxie irrégulière satellite de la Voie Lactée, notre galaxie. Henrietta Leavitt découvrit une relation entre l'éclat intrinsèque des Céphéides et la période de leurs pulsations et montra que les Céphéides intrinsèquement les plus brillantes avaient les plus longues périodes.

L'observation et la mesure de la période d'une Céphéide quelconque permet ainsi de déduire sa luminosité intrinsèque et par comparaison avec la luminosité apparente, de calculer sa distance. C'est ainsi que les variables Céphéides servent de « bougies standard » dans l'Univers et peuvent servir elles-mêmes d'étalon de distance pour calibrer d'autres indicateurs de distance. La distinction entre les Céphéides et d'autres étoiles variables se fait grâce à leur courbe de lumière, dont la forme est caractéristique.

La relation Période-Luminosité des Céphéides a été revue maintes fois depuis les premières mesures d'Henrietta Leavitt. La meilleure estimation actuelle donne :

$$M = -2,78 \log P - 1,35$$

où M est la magnitude absolue de l'étoile et P sa période exprimée en jours.

On se propose dans cet exercice de déterminer la distance de M100 avec les étoiles Céphéides qu'elle comporte (voir figures 11.2) et d'en déduire quelques paramètres cosmologiques permettant de calculer l'âge de l'Univers.

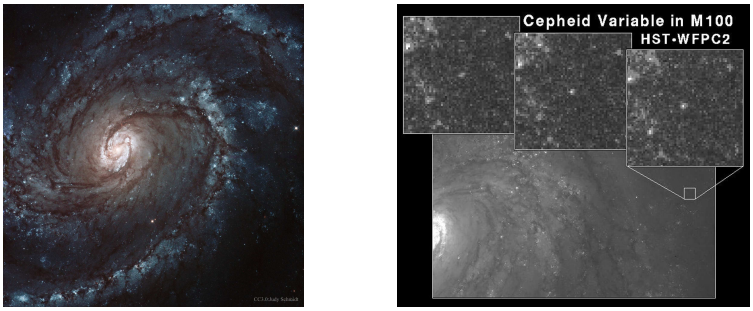


Figure 11.2 – La galaxie M100 vue par le télescope spatial Hubble (à gauche) ; trois des Céphéides de la galaxie M100 vues par Hubble (à droite).

a) Étude de M100

i) À partir des douze graphiques de Céphéides présentés en figure 11.3 page suivante, établir un tableau donnant, pour chaque étoile : sa période, sa magnitude absolue, sa magnitude apparente moyenne, et sa distance (en Mpc). En déduire la distance de la galaxie M100 (en considérant la moyenne des distances ainsi calculées).

ii) La taille angulaire de la galaxie M100 étant de 7 par 6 minutes sexagésimales ; en déduire ses dimensions (en pc). Qu'en conclure quant à sa distance ?

L'inventaire des galaxies de type spirale telles que M100 montre que :
— leur orientation par rapport à la ligne de visée depuis la Terre est aléatoire ;
— la forme générale des galaxies spirales est celle d'une structure spirale aplatie dont le contour est plus ou moins circulaire.

On suppose donc désormais que M100 est un disque elliptique aplati ; nous apparaissant quasiment de face, on considère aussi que l'angle entre la ligne de visée et la normale au plan fondamental de M100 est nul.

iii) La magnitude apparente de M100 vaut 9,4. En supposant la « surface » galactique lambertienne, en déduire l'émittance de M100 (en $W \cdot pc^{-2}$).

iv) Calculer le flux total émis par la galaxie.

v) La puissance totale émise par le Soleil est de $3,83 \cdot 10^{26} W$. En supposant que M100 est composée uniquement d'étoiles de type solaire, en déduire le nombre de celles-ci.

b) Cosmologie à partir de M100 L'étude des spectres des objets dont la nature extragalactique avait été mise en évidence par la distance formidable qui nous en sépare, par exemple grâce aux mesures de distance d'Henrietta Leavitt, a montré que les raies spectrales de ceux-ci étaient d'autant plus décalées vers le rouge que celles-ci étaient éloignées, mettant ainsi en évidence un effet Doppler général touchant

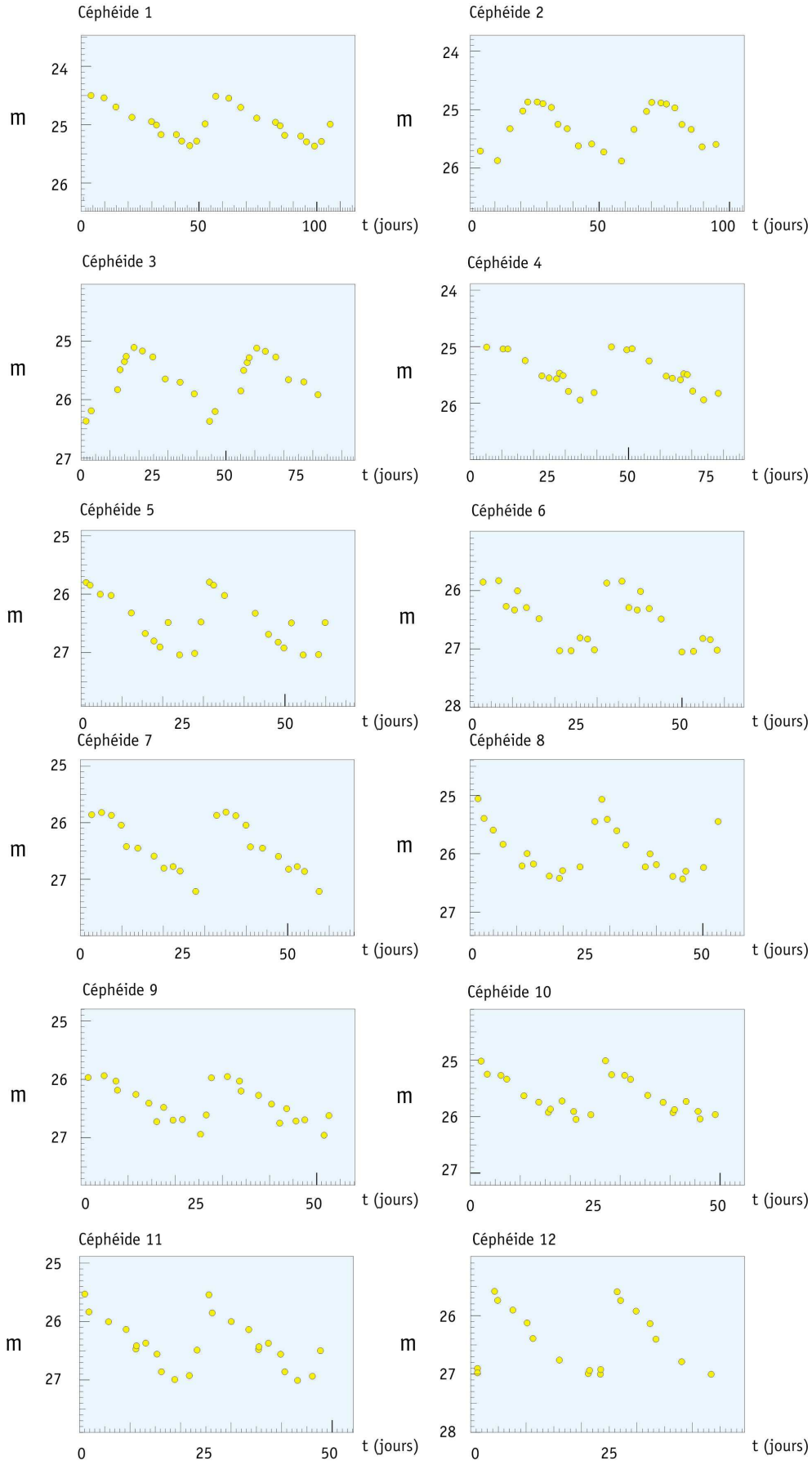


Figure 11.3 – **Courbes de luminosité de Céphéides de M100.**

l'ensemble des objets de l'Univers, et prouvant l'expansion de celui-ci ; c'est à l'astronome Edwin Hubble que l'on doit cette découverte, qui prend la forme de la relation suivante :

$$v = H_0 d$$

où v est la vitesse d'éloignement de la galaxie (en $km \cdot s^{-1}$), H_0 la constante de Hubble (en $km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$) et d la distance de la galaxie (en Mpc).

En ce qui concerne M100, cette vitesse, qui est aussi la vitesse de l'amas de la Vierge dont elle fait partie, a été mesurée à :

$$v = 1400\ km \cdot s^{-1}$$

i) Rappeler ce qu'est une raie spectrale.

ii) Calculer la valeur de la constante de Hubble.

iii) En supposant que le taux d'expansion de l'Univers a été constant depuis le début de l'Univers, déduire l'âge de l'Univers de la valeur de la constante de Hubble ainsi calculée.

Annexes

Année-lumière, parsec Une année-lumière ($a\ell$) est la distance parcourue par la lumière à la vitesse c pendant une année de 365,25 jours.

Un parsec pc est la distance à laquelle la distance Soleil-Terre, qui vaut 150 millions de km, a un angle apparent d'une seconde sexagésimale ; un parsec vaut ainsi $3,26\ a\ell$.

Aire d'une ellipse Une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b a pour surface :

$$S = \pi ab$$

Magnitude absolue La magnitude absolue est la grandeur de la magnitude si l'observateur était situé à une distance de 10 pc de l'objet étudié.

11.7 Réfraction atmosphérique

11.7.1 Optique géométrique

Redémontrer les lois de Descartes à partir du principe de Fermat.

11.7.2 Visée au tachéomètre

On s'intéresse à l'effet de la réfraction sur des visées réalisées au tachéomètre. On utilise pour cela un gradient d'indice de réfraction de la forme :

$$n(h) = 1 + N_0 \exp\left[-\frac{h}{h_0}\right]$$

où h désigne la composante verticale, $h_0 = 8000$ m et $N_0 = 280 \times 10^{-6}$.

Dans ce cadre, on considère un point B observé depuis un point A, distants d'une distance $D \approx 2000\ m$, sous un angle zénithal $Z_A = 89,9000^{\circ}$. La dénivelée h entre les deux est d'environ 100 m. Le rayon de la Terre est d'environ $R_{\oplus} = 6380\ km$.

11.7.2.1 Dans quelle direction est orientée la courbure des rayons ?

11.7.2.2 Exprimer le coefficient de réfraction k. Quelle est sa valeur ?

11.7.2.3 Exprimer la correction angulaire de réfraction ρ et l'erreur faite sur la composante verticale du point visé Δh.

11.7.2.4 Montrer que dans le cas de visées zénithales réciproques et simultanées (A et B s'observent mutuellement et simultanément ; en l'occurrence, $Z_B = 90,1139^c$) on peut calculer k sans connaissance de l'indice de réfraction.

11.7.2.5 Quelle est la distance réelle entre les 2 points ?

11.7.2.6 Calculer le rayon de courbure des rayons.

11.7.3 Modélisation de la troposphère en GNSS

11.7.3.1 Montrer que la réfractivité pour une onde radio peut s'écrire en fonction des masses volumiques de l'air humide ρ et de la vapeur d'eau ρ_w sous la forme :

$$\begin{aligned} N &= N_h + N_w \\ \text{avec} \quad N_h &= k_1 R_d \rho \\ \text{et} \quad N_w &= k'' R_w \rho_w + k_3 R_w \frac{\rho_w}{T} \end{aligned}$$

Expliciter la constante k''.

11.7.3.2 Exprimer le retard hydrostatique au zénith :

$$\Delta L_h^z = \int_0^{+\infty} [n(z) - 1] dz$$

en fonction de la pression sol P_0 ($h = 0$) et de g_m, l'accélération moyenne de champ de pesanteur sur la colonne atmosphérique donnée par :

$$g_m = \frac{\int_0^{+\infty} \rho(z) g(z) dz}{\int_0^{+\infty} \rho(z) dz}$$

On utilisera pour cela l'équation de l'équilibre hydrostatique : $dP = -\rho g dz$.

11.7.3.3 Que vaut ce retard pour P_0 = 1013 hPa et $g_m = 9,78 m \cdot s^{-2}$?

11.7.3.4 Exprimer ΔL_w^z en fonction du contenu intégré en vapeur d'eau :

$$IWV = \int \rho_w(z) dz$$

et de T_m, température moyenne de la colonne atmosphérique humide donnée par :

$$\frac{1}{T_m} = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\rho_w(z)}{T(z)} dz}{\int_0^{+\infty} \rho_w(z) dz}$$

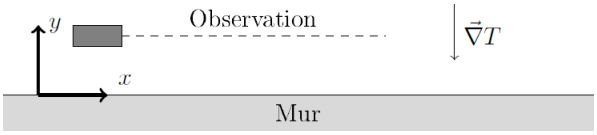
11.7.3.5 Que vaut ce retard pour :

$$\rho_w = \rho_{w,0} \exp\left[-\frac{z}{h_w}\right]$$

avec $\rho_{w,0} = 0,01\ kg \cdot m^{-3}$, $h_w = 2000\ m$ et $T_m = 277\ K$.

11.7.4 Visée topométrique le long d'un mur (extrait de la composition 2013 – 2014)

On effectue une visée au tachéomètre le long d'un mur exposé en plein Soleil. En raison de cette exposition, un gradient de température perpendiculaire au mur de 5 $K \cdot m^{-1}$ est observé au strict voisinage du mur.



Les hypothèses de travail sont les suivantes :
— Le tachéomètre est situé au strict voisinage du mur ;
— La pression et l'humidité de l'air demeurent constantes ;
— La variation de l'indice de réfraction n est commandée par :

$$dn = -1,1dT$$

— L'indice de réfraction est constant dans la direction parallèle au mur (Ox), sa valeur est très proche de l'unité.

11.7.4.1 Quelle est l'orientation de la courbure du rayon ; justifier.

11.7.4.2 On peut montrer que l'équation des rayons peut se formuler après simplification comme suit :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1,1\frac{dT}{dy}$$

Quelles hypothèses ont permis de faire cette simplification ?

11.7.4.3 Montrer que la trajectoire est de la forme d'une parabole.

11.7.5 Nivellement indirect (extrait de la composition de rattrapage 2015 – 2016)

NB : exercice inspiré de [Léauthaud, 1999].

On s'intéresse à un tachéomètre électronique A observant un prisme B. L'altitude de A est $H_A = 299,660\ m$. On sait que le tachéomètre a un biais constant, négatif, sur les mesures de distance, qu'on a étalonné à 2 cm ; le constructeur donne aussi la relation suivante pour le biais positif de mesure de distance selon les conditions météorologiques (en parties par million) :

$$c_{PPM} = 275 - \frac{106 \times P_{mm\ Hg}}{273,15 + t_{\circ C}}$$

avec $P_{mm\ Hg}$ la pression en millimètres de mercure, et $t_{\circ C}$ la température en degrés Celsius. Ici on a $P = 740\ mm\ Hg$ et $t = 5°C$. Le coefficient de réfraction est supposé valoir $k = 0,13$.

Au cours des observations, A observe B avec un angle zénithal $Z_A = 93,6319\ gon$ et mesure une distance courbe $L_0 = 1999,994\ m$.

On note ρ l'angle de réfraction, θ l'angle au centre de la Terre entre A et B, L la distance droite entre A et B, et D la distance entre A et le projeté vertical de B sur la surface de même niveau que A, que l'on note B_H.

Enfin, la figure ci-dessous représente le principe des opérations ; dans l'approximation où θ est petit, on donne que la sphéricité s s'exprime :

$$s = \frac{D^2}{2R_\oplus}$$

Sous la même hypothèse et si le rayon lumineux est peu incliné par rapport à l'horizontale, alors avec une relation donnant le coefficient de réfraction (voir annexes), on a la différence entre l'erreur de sphéricité et celle de dénivelée qui s'écrit :

$$s - r = (1-k)\frac{D^2}{2R_\oplus}$$

11.7.5.1 Calculer la distance géométrique entre A et B, notée L.

11.7.5.2 Calculer l'altitude de B.

11.7.5.3 Calculer l'angle de réfraction ρ.

11.7.5.4 Calculer l'angle au centre θ.

11.7.5.5 Calculer la distance D.

Annexes

Angles $\pi\ rad = 180° = 200\ gon$

Réfraction Angle de réfraction :

$$\rho = \frac{kD}{2R_\oplus}$$

avec k le coefficient de réfraction, $R_\oplus$ le rayon de la Terre, et D la distance entre deux points. L'erreur sur la mesure de dénivelée s'écrit :

$$\begin{aligned} r &= \rho D \\ &= k\frac{D^2}{2R} \end{aligned}$$

11.8 Généralités

11.8.1 Altimétrie spatiale (extrait de la composition de l'année 2014 – 2015)

La radar est une technique exploitant la transparence de l'atmosphère aux ondes électromagnétiques de longueur d'onde centimétrique. Elle consiste dans l'émission d'une onde par une antenne, et à mesurer le temps de l'aller-retour entre l'antenne et les cibles frappées par l'onde. Cette mesure donne accès à la distance entre l'antenne et les cibles en questions.

On considère ici un dispositif de radar : une antenne de diamètre d émet dans le vide à un instant t_e une onde électromagnétique de célérité c, de longueur d'onde λ, qui se réfléchit en t_r sur une cible de surface efficace S_c située à une distance R, dont on observe l'écho en t_{obs}.

11.8.1.1 Distance mesurée

On considère dans un premier temps qu'une seule impulsion de durée infiniment nulle est émise.

a) Exprimer la distance R en fonction des données du problème. On considère désormais que chaque impulsion a une durée τ, et que les impulsions sont répétées avec une période T_e.

b) Quelle est la résolution en distance σ_d dans cette configuration ? Calculer sa valeur pour $\tau = 30\ \mu s$. Pour améliorer la résolution, on module l'impulsion émise avec un signal étalé sur une bande fréquentielle de largeur B, de sorte que la résolution est désormais :

$$\sigma_d = \frac{c}{2B}$$

c) Comparer la valeur précédemment trouvée de la résolution avec celle obtenue dans le cas d'une bande de modulation de largeur $150\ MHz$**.**

11.8.1.2 Puissance reçue

On appelle gain, d'émission ou de réception d'une antenne, la grandeur sans unité :

$$G = \frac{4\pi\ A}{\lambda^2}$$

où A est la surface efficace de l'antenne, (*i.e.* sa surface telle que « vue » par l'onde), à l'émission ou à la réception respectivement, et λ la longueur d'onde du signal. Le gain caractérise la directivité d'une antenne, à l'émission ou à la réception d'une onde électromagnétique ; il s'agit donc en réalité d'une fonction de deux angles (azimut et hauteur par exemple). Ainsi, dans le cas du RADAR, la puissance effectivement émise, ou reçue, dans la direction du lobe principal d'émission de la puissance est :

$$P_e = P_0 \times G_e$$

avec P_0 la puissance isotrope d'émission (en W) et G_e le gain d'émission.

a) Exprimer la puissance surfacique incidente $\mathcal{P}_{inc}$ **sur la cible en fonction de la puissance isotrope** P_0**, du gain d'émission de l'antenne** G_e **et de la distance** R **entre l'antenne et la cible.**

b) Exprimer la puissance reçue en retour par l'antenne P_r **en fonction de** $\mathcal{P}_{inc}$**, de la section efficace de la cible** S_c**, de la surface de l'antenne** S_a **et de la distance** R **entre la cible et l'antenne.**

c) Montrer finalement que la puissance reçue s'exprime :

$$P_r = P_0 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \frac{G_e G_r}{R^4} S_c \tag{11.1}$$

11.8.1.3 À propos du satellite Jason-2

Jason-2 est un satellite franco-américain d'altimétrie spatiale. Cette technique repose sur des satellites en orbite basse (entre 700 et 1400 km d'altitude) et polaire (inclinaison entre 60° et 100°) émettant une onde radar au nadir (*i. e.* la verticale vers le bas) se reflétant à la surface de la mer. La fréquence de l'onde est choisie dans le domaine radio, en raison de la transparence de l'atmosphère dans ce domaine fréquentiel. La mesure du temps de l'aller-retour de l'onde donne la distance entre le satellite et la surface de la mer.

Le point crucial pour cette technique consiste dans le calcul d'une orbite précise pour le satellite. Celle-ci est déterminée au centimètre près par plusieurs techniques d'observations : un récepteur GPS [2] est embarqué sur le satellite, ainsi qu'une antenne DORIS [3] et un réflecteur de télémétrie laser.

De cette orbite précisément déterminée et des mesures de distance verticale entre le satellite et le niveau de la mer, on déduit l'altitude du niveau de la mer. C'est avec cette technique qu'on a pu établir la montée du niveau des mers depuis une vingtaine d'année à hauteur de $3,3\ mm/an$. Parmi les satellites d'altimétrie spatiale, on peut mentionner Envisat, ERS, Topex-Poseidon, Jason-1, Saral-AltiKa, Sentinel-3A, etc. Parmi d'autres perturbations, celle de l'humidité atmosphérique est corrigée à partir des mesures du radiomètre, qui quantifie le contenu intégré en vapeur d'eau de l'atmosphère au nadir du satellite à partir de l'émission thermique de la vapeur d'eau atmosphérique, ainsi que la quantité d'eau liquide atmosphérique sous forme de nuages.

Quelques caractéristiques techniques de Jason-2 peuvent être données dans le tableau ci-dessous :

2. *Global Positioning System.*

3. Détermination d'Orbite par Radio-Intégration sur Satellite : système développé par le Centre National d'Études Spatiales et l'Institut Géographique National dans les années 1980. C'est désormais une des quatre techniques de géodésie spatiale utilisées pour la détermination du Repère International de Référence Terrestre (*International Terrestrial Reference Frame*) calculé par l'IGN.

Orbite	
Lancement	20/06/2008
Altitude (km)	1336
Inclinaison ($^\circ$)	66
Altimètre POSEIDON	
Diamètre (m)	1,20
Fréquences (GHz), bande	13,757 (Ku), 5,3 (C)
Cadence répétition impulsion (Hz)	2060 entrelacé 3Ku-1C-3Ku
Durée impulsion (μs)	320
Puissance isotrope (W)	7
Taille angulaire faisceau ($^\circ$)	1,28 (Ku), 3,4 (C)
Largeur fréquentielle (MHz)	320 (Ku, C)
Radiomètre AMR	
Diamètre (m)	1
Fréquences (GHz)	18,7 ; 23,8 ; 34,0

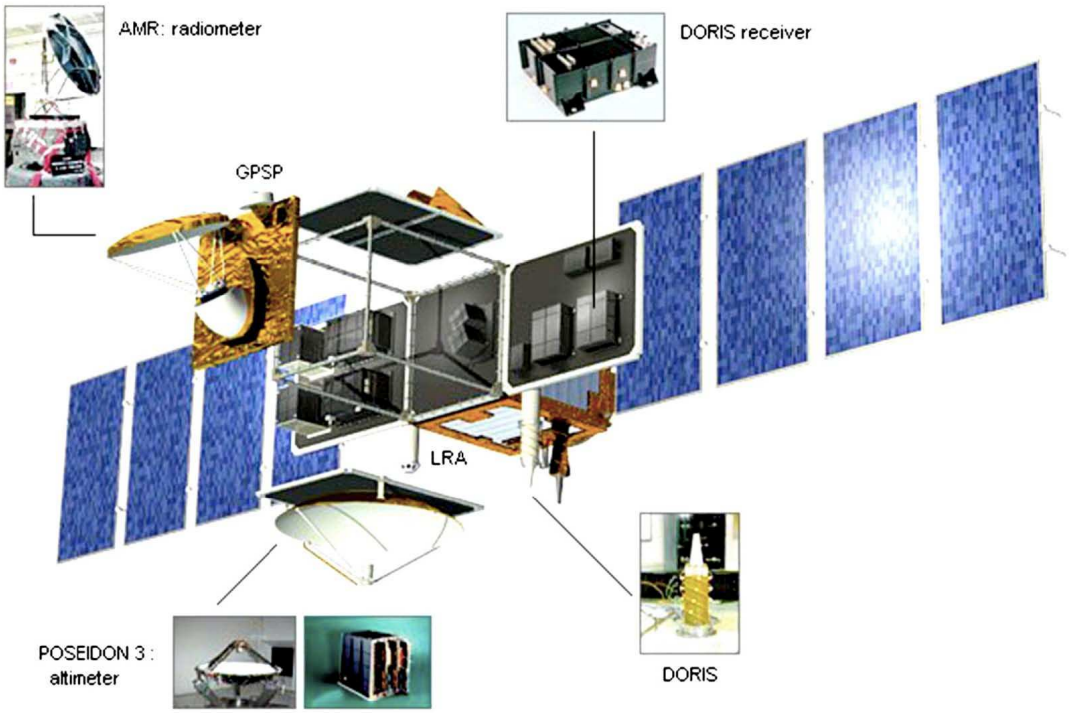


Figure 11.4 – Le satellite Jason-2.

a) Approche

i) Calculer les longueurs d'onde de fonctionnement de l'altimètre.

ii) Quelles couches de l'atmosphère entraînent un retard d'une onde électromagnétique et en raison de quels phénomènes ?

iii) Pourquoi l'altimètre de Jason-2 utilise-il deux fréquences ?

iv) Existe-t-il une borne, inférieure ou supérieure, aux fréquences utilisables dans le domaine radio en altimétrie spatiale et, si oui, en raison de quel phénomène ?

v) Calculer le temps de l'aller-retour de l'onde en négligeant les retards atmosphériques.

b) Interaction d'une onde radar avec l'eau On fait ici l'hypothèse que la conductivité de l'eau de mer est d'environ $4,5\ S \cdot m^{-1}$. On rappelle que, dans un milieux conducteur, la permittivité diélectrique relative s'écrit :

$$\epsilon_r = \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, σ la conductivité, ω la pulsation, et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

i) Calculer l'indice de réfraction de l'eau de mer en bande Ku.

ii) Calculer l'indice de réfraction de l'air à 15°C en supposant une masse volumique de vapeur d'eau $\rho_w = 0,01\ kg \cdot m^{-3}$ et en considérant l'air sec comme un gaz parfait.

iii) Calculer les facteurs de transmission et de réflexion en éclairement d'une onde électromagnétique en bande Ku se propageant de l'air vers l'eau de mer. Conclure.

c) Mesure radar

i) Justifier que le gain en émission puisse être considéré comme égal au gain de réception. Le calculer dans le cas de la bande Ku.

ii) Modifier l'équation (11.1) en y introduisant la transmittance atmosphérique T_a, la réflectance de l'eau de mer R_e en considérant que le gain d'émission de l'antenne est égal à son gain en réception.

iii) Calculer la taille du faisceau en bande Ku au niveau de la mer.

iv) Calculer l'incertitude a priori sur la mesure de distance en bande Ku, et celle corrigée tenant compte de la modulation de fréquence de l'impulsion.

En réalité, par la technique de synthèse d'ouverture, consistant à intégrer le signal de chaque point de la trace tout au long de sa visibilité par l'antenne au cours du déplacement du satellite, on parvient à atteindre une incertitude de l'ordre du centimètre sur la mesure.

v) À partir des grandeurs suivantes (puissance d'émission, gains, longueur d'onde, transmittance atmosphérique, réflectance de l'eau de mer, taille de la tache du faisceau), calculer la puissance potentiellement reçue par le satellite en bande Ku.

vi) L'état de la mer biaise-t-il la mesure réalisée par rapport à celle que l'on souhaite atteindre ? Un schéma, commenté, peut faire office de réponse.

d) Le radiomètre de Jason-2 Le radiomètre de Jason-2 a vocation à observer le rayonnement thermique de l'eau atmosphérique.

i) Au regard du spectre d'absorption de l'atmosphère (voir figure 11.5 page suivante), commenter le choix des fréquences du radiomètre. Pourquoi, en particulier, le radiomètre utilise-t-il trois fréquences ?

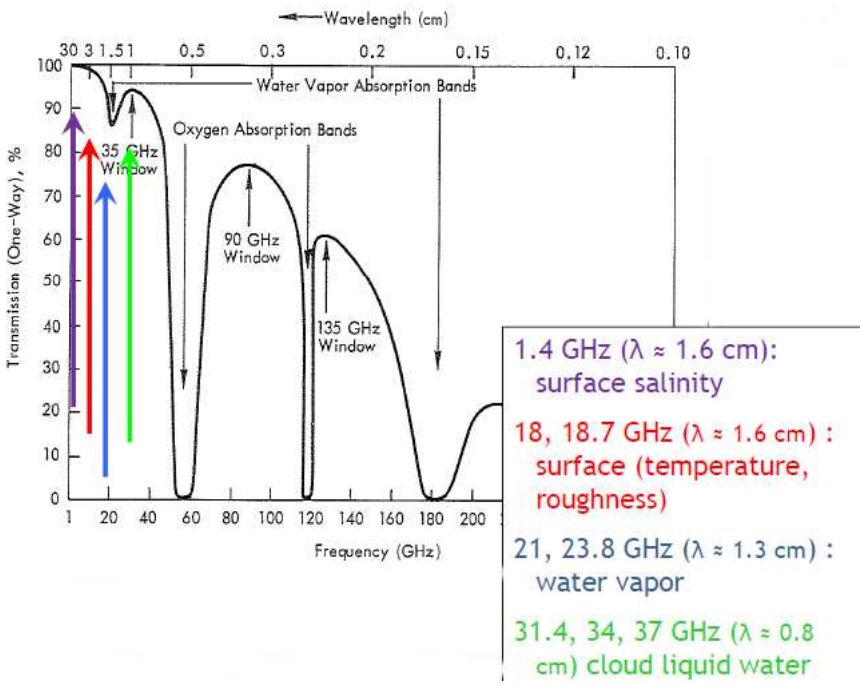


Figure 11.5 – Transmittance relative dans le domaine micro-ondes et infrarouge lointain. Traduction : $18-18,7\ GHz$, surface (rugosité, température) ; $21-23,8\ GHz$, vapeur d'eau ; $31,4-34-37\ GHz$, eau liquide des nuages.

ii) Quelle approximation peut-on faire pour le calcul de la luminance spectrale dans les hyperfréquences ? Utiliser cette approximation pour calculer la luminance spectrale à la fréquence centrale du radiomètre et en considérant une température de $15^{\circ}C$.

iii) En faisant l'hypothèse que le phénomène limitant le champ du radiomètre est la diffraction (i.e. le demi-angle de la tache centrale est $1,22\ \lambda/d_r$ avec d_r le diamètre du radiomètre), calculer l'angle solide vu par celui-ci dans sa fréquence centrale.

iv) En considérant une largeur spectrale autour de la fréquence centrale $\Delta f = 100\ MHz$, en déduire la puissance reçue.

11.8.2 Météorologie radar (extrait de la composition 2016 – 2017)

NB : les thèmes abordés dans ce sujet touchent à la réfraction et à la courbure des rayons lumineux, aux milieux diélectriques, à la radiométrie, ainsi qu'à la physique des ondes. Inspiré de la seconde épreuve de physique du concours Mines-Ponts, filière PC, session 2006.

Un des moyens pour détecter les nuages et les précipitations consiste à utiliser un RADAR (*Radio detection and ranging*). Son principe consiste en un dispositif émettant une onde de fréquence comprise entre 10 MHz et 100 GHz, capable d'en observer l'écho diffusé par les objets illuminés par celle-ci. Si une antenne circulaire de diamètre a émet une puissance $\mathcal{P}$ à la fréquence λ, nous admettrons que l'écho qu'elle observera d'une cible de surface s située à la distance R est à la même fréquence et qu'il est perçu par l'antenne avec une puissance $\mathcal{P}'$ telle que :

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}\frac{sa^4}{16\pi(0,61)^2R^4\lambda^2}$$

11.8.2.1 Échos d'un radar à impulsion

Un radar à impulsion émet régulièrement des impulsions monochromatiques, de fréquence $f_0 = 10\ GHz$, sur une durée τ très courte ($\tau = 2\mu s$), avec une puissance crête P_c. Les impulsions se ré-

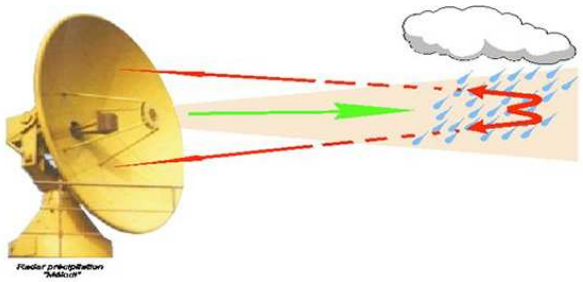


Figure 11.6 – Un radar météorologique. Source : Météo-France.

pètent à une fréquence $f_r = 1/T_r$ avec $T_r \gg \tau$ ($f_r = 1\ kHz$).

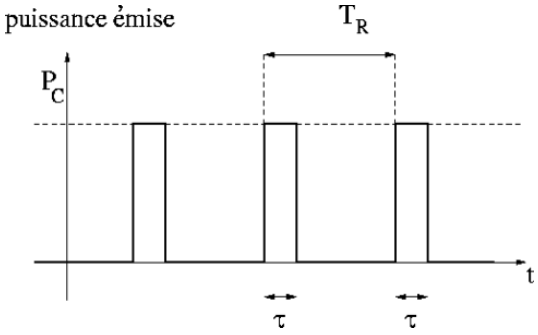


Figure 11.7 – Chronogramme des émissions ; P_c est la puissance crête.

On suppose ici que le radar est situé en O, et qu'il peut tourner autour de l'axe Oy ; le plan Oxz peut donc être balayé par le radar.

a) Équation d'observation On suppose qu'une seule cible est visée par l'antenne.

Comment peut-on connaître la distance R du radar à la cible ? Expliciter le principe en établissant le chronogramme de réception et en y superposant le chronogramme d'émission. En écrivant la condition de mesure d'un aller-retour dans une période d'émission, montrer que si T_r est trop faible, il peut y avoir ambiguïté sur la mesure de la distance R. Comment faut-il choisir la valeur de la fréquence de répétition f_r pour lever cette ambiguïté ? Effectuer l'application numérique en prenant pour R la portée théorique maximale, admise à $93\ km$; commenter la valeur numérique de la fréquence de répétition fournie dans le paragraphe d'introduction.

b) Résolution On s'intéresse désormais à la résolution spatiale du radar dans la direction d'émission-réception, appelée résolution radiale, ainsi qu'à la résolution selon l'angle d'émission, dite résolution azimutale.

i) On considère d'abord deux cibles immobiles situées sur l'axe d'émission-réception et séparées dans l'espace d'une distance ΔR. Connaissant la durée du signal τ, proposer un critère pour déterminer la plus petite valeur de ΔR telle que l'on puisse observer l'existence de deux cibles distinctes sur le signal reçu. On appellera ΔR la résolution axiale.

ii) On considère ensuite deux cibles immobiles dans le plan Oxz, à la même distance R de l'antenne, et séparées d'un angle d'azimut ψ mesuré autour de l'axe Oy. On suppose que l'ouverture angulaire du faisceau vaut $\Delta\alpha = 0,61\lambda/a$, avec a la dimension horizontale de l'antenne, et qu'aucune énergie n'est émise en dehors de ce faisceau. Proposer un critère pour déterminer quelle est la plus petite valeur de ψ telle que l'on puisse observer l'existence de deux cibles distinctes sur le signal reçu. On appellera ψ la résolution azimutale.

iii) En supposant que la résolution azimutale est la même que la résolution zénithale, quel est le volume V dans lequel deux cibles ne sont pas séparables ? Faire un tableau à double entrée pour des applications numériques avec $R = 1\ km$ et $R = 10\ km$, en calculant, à chaque fois, ΔR, $R\Delta\alpha$ et V. Ces dispositifs sont-ils adaptés à l'étude des nuages ?

11.8.2.2 Trajet du faisceau électromagnétique

On s'intéresse ici au trajet de l'onde émise par le radar. On sait déjà que celui-ci est rectiligne dans un milieu homogène ; or l'atmosphère ne l'est pas, et ses paramètres thermodynamiques (température, pression, notamment), et donc optiques (indice de réfraction), varient localement. Pour l'instant, on néglige la rotondité de la Terre, et on suppose que l'indice ne dépend que de l'altitude.

On considère que les ondes sont émises par le centre O de l'antenne, celle-ci étant au sol et pointant une direction faisant un angle θ avec l'horizontale définie par l'axe Oz. L'altitude H est mesurée selon la verticale définie par Oy, avec O comme origine. On modélise l'atmosphère par M couches de même épaisseur h, telles que la couche comprise entre les altitudes $(q-1)\cdot h$ et $q\cdot h$ soit indicée par q, avec $q \in [1; M]$; l'indice de réfraction de la couche q est noté n_q.

a) Atmosphère discrète **Montrer que la trajectoire est plane et déterminer, pour une couche q, la relation que vérifie l'angle θ_q, défini par la direction de l'onde avec l'horizontale dans la couche q, en fonction des indices de réfraction n_q, $q \in [1; M]$, et de l'angle $\theta_1 = \theta$. Interpréter la simplicité du résultat.**

b) Atmosphère continue On considère désormais que l'atmosphère est un milieu dont l'indice de réfraction varie continûment. Ainsi, celle-ci est supposée structurée de couches infiniment minces, d'épaisseur dH. On admet un modèle de variation de l'indice avec l'altitude tel que :

$$n(H) \quad = \quad 1 + 0,289 \cdot 10^{-3} \exp(-0,136 \cdot H)$$

avec H en km.

Calculer l'angle θ_H (en degrés décimaux) que fait le rayon par rapport à l'horizontale quand ce rayon atteint l'altitude $H = 10\ km$.

c) Influence de la rotondité de la Terre On prend maintenant en compte la rotondité de la Terre ; l'origine O de l'antenne est toujours supposée à l'altitude nulle. Les couches de l'atmosphère sont donc supposées sphériques elles aussi, et concentriques avec la Terre.

i) En utilisant la loi de Bouguer, calculer l'angle θ'_H (en degrés décimaux) que fait le rayon par rapport à l'horizontale locale de l'antenne, quand ce rayon atteint l'altitude $H = 10\ km$ dans le cas d'une antenne pointant dans une direction $\theta = 10°$ et d'un indice variant en fonction de l'altitude selon la loi donnée précédemment. En le comparant avec le résultat obtenu ne tenant pas compte de celle-ci, analyser les effets de la rotondité de la Terre.

Un calcul plus poussé, avec un développement limité au premier ordre, donne accès à la distance au sol Z_H entre le radar et un observateur au sol placé à la verticale du point où l'onde radar atteint une altitude donnée H :

$$Z_H \quad = \quad \frac{H}{\tan\theta} - \frac{1}{\tan\theta \sin^2\theta}\left(\frac{n(H)-n(0)}{n(0)} + \frac{H}{R_\oplus}\right)$$

ii) En prenant les mêmes valeurs numériques que précédemment, expliciter les influences respectives de la variation d'indice et de la courbure de la Terre. Que se passerait-il si le facteur entre parenthèse dans l'expression Z_H ci-dessus était nul ? Expliquer pourquoi on parle de « radar transhorizon ».

11.8.2.3 Détection de formations pluvieuses

La météorologie radar est déclinée en de multiples applications selon le type de phénomène observé : brouillard, nuage de pluie, nuage de glace, etc. Ici on se contente d'étudier des nuages formés de gouttes d'eau sphériques et toutes de même rayon. La fréquence du radar est $f_0 = 10\ GHz$. On néglige le phénomène de diffusion multiple, et on suppose que la présence des gouttes d'eau n'influence pas la vitesse de propagation de l'onde.

On considère que l'onde est formée d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$, harmonique et de fréquence f_0, d'amplitude E_0, supposée plane et polarisée rectilignement selon l'horizontale. Les gouttes d'eau sont assimilées à des sphères de rayon b, que l'on supposera immobiles dans les questions suivantes. Sous l'action de ce champ, une goutte d'eau acquiert un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{p} &=& p_s \overrightarrow{E} \\ \text{avec :} \quad & p_s &=& 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} b^3 \\ \text{et :} \quad & \overrightarrow{E} &=& \overrightarrow{E_0} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

avec ϵ_0 la permittivité du vide, ϵ la permittivité relative de l'eau, supposée constante aux fréquences de travail utilisées ici.

a) Absorption

i) À quelle condition sur le rayon de la sphère et sur la fréquence du radar peut-on considérer le champ de l'onde uniforme dans le volume de la goutte ? Cette condition est-elle vérifiée ici ?

On suppose à présent que cette condition est bien vérifiée, et que le champ électrique est uniforme dans une goutte de pluie. Pour calculer la puissance absorbée par la goutte d'eau, on introduit une permittivité diélectrique complexe :

$$\begin{aligned} & \epsilon &=& \epsilon' + i\epsilon'' \\ \text{avec :} \quad & i^2 &=& -1 \end{aligned}$$

ii) Calculer la puissance cédée par le champ électromagnétique à une goutte d'eau en admettant que la densité de courant volumique correspondant à une goutte de pluie s'écrit :

$$\overrightarrow{j} = \frac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial t}$$

Calculer, en fonction du nombre N de gouttes d'eau par unité de volume, la puissance cédée par le champ électromagnétique aux gouttes d'eau, par unité de volume. Établir la valeur moyenne temporelle de cette grandeur, notée P, et vérifier la relation de proportionnalité $P \propto N b^3 f_0$.

iii) Calculer le vecteur de Poynting du champ incident dans le vide, puis P_0, la moyenne temporelle de la puissance électromagnétique dans le vide (rappel : la puissance électromagnétique est le flux du vecteur de Poynting à travers une surface). On définit alors σ_a la section efficace équivalente d'absorption, comme la surface telle que la puissance électromagnétique traversant σ_a est égale à la puissance absorbée par une goutte.

iv) Calculer cette section efficace par unité de volume. Comparer avec la surface d'une sphère de gouttes d'eau. Commenter le résultat. Qu'observe-t-on lorsque les gouttes d'eau grossissent ?

v) À partir de l'éclairement en fonction de la puissance incidente P_0, écrire la variations de cette grandeur entre z et dz. Exprimer ensuite l'éclairement incident absorbé dans un volume d'épaisseur dz, pour un nuage contenant N gouttes d'eaupar unité de volume, en l'exprimant en fonction de l'éclairement à l'abscisse z noté $\mathcal{E}(z)$, de N et de la section efficace d'absorption σ_a. En déduire l'équation différentielle décrivant l'évolution de l'éclairement lorsqu'il pénètre le nuage. Comparer l'expression obtenue avec la loi de Beer-Lambert :

$$\ln \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \quad = \quad \gamma \kappa z$$

où κ est la concentration du milieu absorbant, γ une constante caractéristique du dispositif, et $\mathcal{E}$ l'éclairement.

b) Diffusion ; cas d'un cumulonimbus

i) Diffusion Placée dans ce champ électromagnétique, la goutte d'eau se comporte comme un dipôle oscillant situé en un point G, et rayonne une onde électromagnétique de même fréquence f_0. On admettra qu'en un point M situé à une distance R très grande vis-à-vis de la longueur d'onde λ, le champ électrique créé par ce dipôle s'exprime comme :

$$\overrightarrow{E_d} \quad = \quad \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi R} (2\pi f_0)^2 \, p \left(t - \frac{R}{c} \right) \overrightarrow{u_\theta}$$

où θ est l'angle formé par la direction du moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ et le vecteur $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ étant le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{GM}$ parallèle au sol, μ_0 étant la perméabilité du vide.

α. Caractériser l'onde rayonnée par une goutte d'eau en termes géométriques. Quelle approximation permet de retrouver l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B_d}$:

$$\overrightarrow{B_d} \quad = \quad \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi R c} (2\pi f_0)^2 \, p \left(t - \frac{R}{c} \right) \overrightarrow{u_\varphi}$$

$\overrightarrow{u_\varphi}$ étant le vecteur orthonormal à $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$. Calculer le vecteur de Poynting associé au point M. Exprimer la puissance instantanée diffusée dans tout l'espace ; montrer que sa moyenne temporelle la puissance vaut :

$$\langle P_{4\pi} \rangle \quad = \quad \frac{\mu_0 |p_s|^2 (2\pi f_0)^4 E_0^2}{12\pi c}$$

Comment expliquer que ce résultat soit indépendant de R ?

On définit la section efficace de diffusion pour une goutte par la grandeur σ_d telle que la puissance électromagnétique traversant σ_d est égale à la puissance diffusée par une goutte.

β. À partir du résultat précédent, écrire la section efficace de diffusion σ_d et l'exprimer en fonction de ω, c, b, ϵ' et ϵ''. Montrer que $\sigma_d \propto b^6$.

On utilise souvent en météorologie la notion d'intensité de la pluie, notée Q, qui est la hauteur d'eau, en millimètre, qui tombe en une heure ; cette quantité est mesurée avec un pluviomètre. On considère ici que $Q = 1 \ mm/h$.

γ. La fréquence du radar est de $10 \ GHz$; on a alors, pour les gouttes de pluie : $\epsilon' = 29$ et $\epsilon'' = 58$. Comparer les absorptions et les diffusions dues aux pluies telles que le rayon des gouttes de pluie est d'une part de $b_1 = 30\mu m$ et, d'autre part, de $b_2 = 3 \ \mu m$.



Figure 11.8 – Cumulonimbus.

c) Cas d'un cumulonimbus On considère maintenant une formation nuageuse telle qu'un cumulonimbus, modélisée comme un cylindre d'axe vertical, de rayon $r = 1\ km$. On suppose que le radar, positionné à 20 km de cette structure, ne l'illumine que sur une tranche d'épaisseur 100 m, à une altitude de 3500 m. On admet que toutes les gouttes ont le même rayon b, et on rappelle que N est le nombre de gouttes par unité de volume.

Exprimer successivement : la surface du faisceau à l'arrivée sur le nuage, la fraction de puissance interceptée par celui-ci, la fraction de puissance diffusée par cette interception, enfin, la proportion de puissance captée en retour par l'antenne (en supposant une diffusion par le nuage isotrope). Comment se comportent la largeur de l'impulsion reçue et la puissance reçue en fonction des paramètres du problème ? Cette information peut-elle renseigner les météorologues sur les paramètres Q, r, b, N, etc. ?

11.8.2.4 Détermination de la vitesse de la cible

Lorsque la cible est mobile, la fréquence f_r de l'onde réfléchie par la cible mobile est différente de la fréquence f_0 de l'onde sinusoïdale émise par l'antenne : on appelle ce phénomène effet Doppler. On se limite ici à un déplacement radial de la cible, avec une vitesse v très inférieure à celle de la lumière.

a) Déterminer l'intervalle de temps séparant l'instant d'arrivée, sur la cible C en mouvement, de deux crêtes successives d'une sinusoïde de fréquence f_0 émise par l'antenne O, et en déduire f_0', fréquence de la sinusoïde reçue par la cible en fonction de f_0, v et c. On suppose que la cible en mouvement émet une sinusoïde de fréquence f_0'. Déterminer l'intervalle de temps séparant l'instant d'arrivée, sur la l'antenne, de deux crêtes successives de cette sinusoïde de fréquence f_0' émise par la cible, et en déduire f_r, fréquence de la sinusoïde reçue par l'antenne, en fonction de f_0', v et c. En déduire l'expression de la fréquence f_r en fonction de f_0, v et c. En se limitant au premier ordre, effectuer l'application numérique en prenant $v = 20\ m \cdot s^{-1}$ et $f_0 = 10\ GHz$.

On considère maintenant que les gouttes de pluie ont une vitesse $\overrightarrow{v}$ constante orientée selon l'axe vertical Oy. L'onde émise par l'antenne est un signal sinusoïdal $s_e(t)$ de fréquence f_0. L'antenne radar est pointée avec un angle $\theta = 10°$ par rapport à l'horizontale et on supposera que les gouttes de pluie analysées sont dans le lobe d'émission de l'antenne.

b) En projetant la vitesse des gouttes de pluie sur la composante radiale, calculer le décalage Doppler que l'on peut observer sur le signal reçu $s_r(t)$, en supposant que la vitesse de celles-ci est de $0,1\ m \cdot s^{-1}$.

On effectue le tri des vitesses v en envoyant le signal précédent dans un ensemble de L filtres passe-bande $[F_1, \ldots, F_L]$, dans lequel chaque filtre a une largeur de bande δ et est centré sur la fréquence $f_0 + (p-1)\delta$, $p \in [1, L]$.

c) Quelle doit être la largeur de bande δ pour estimer la vitesse de la question précédente avec 20% d'erreur ? De surcroît, si ce système doit mesurer des vitesses jusqu'à $4\ m \cdot s^{-1}$, combien doit-il y avoir de bandes fréquentielles ? Est-ce réaliste ?

11.8.2.5 Conclusion : prévision météorologique à l'aide d'un radar

Au vu des différents aspects de ce problème, estimez-vous possible de connaître, à $10\ km$ de distance, toutes les caractéristiques d'une formation pluvieuse (intensité de la pluie, rayon des gouttes d'eau, vitesse, etc.) et son évolution à venir ? Si oui, comment utiliser l'antenne radar et, le cas échéant, que faudrait-il développer qui n'aurait pas été abordé dans ce sujet ?

11.9 Devoir à la maison

Ce devoir à la maison est à rendre, au plus tard, le jour de la dernière séance de cours. Il est demandé, dans la mesure du possible, de ne pas dépasser le format d'une copie double, tout en respectant les consignes données en ouverture de la partie sur les exercices. Hormis les paramètres donnés dans l'énoncé des problèmes, les étudiants sont libres d'emprunter au cours tous les éléments requis pour la résolution de ces exercices.

11.9.1 Ondes électromagnétiques et photons

La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un métal « parfaitement » conducteur induit une pression de radiation P dont la valeur moyenne $\langle P\rangle$ est reliée à la densité moyenne d'énergie de l'onde incidente $\langle u_i\rangle$ par $\langle P\rangle = 2\langle u_i\rangle$. On se propose de retrouver ce résultat, puis de le généraliser, en utilisant une théorie corpusculaire.

11.9.1.1 Flux de photons

À l'onde incidente, onde plane progressive monochromatique de fréquence ν se propageant dans la direction et le sens de l'axe (Ox), on associe un faisceau de photons se propageant évidemment à la vitesse c, parallèlement à l'axe (Ox). On rappelle qu'un photon de fréquence possède une énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement de norme $p = h\nu/c$ (h désignant la constante de Planck).

a) Quelle densité particulaire n de photons peut-on attribuer à l'onde incidente ? Exprimer n en fonction de $\langle u_i\rangle$, h et ν.

b) Retrouver la relation $\langle P\rangle = 2\langle u_i\rangle$ en considérant des collisions parfaitement élastiques des photons sur la paroi métallique.

11.9.1.2 Proposer une généralisation de l'expression de la valeur moyenne de la pression de radiation dans le cas d'une incidence oblique sous un angle θ sur la surface réfléchissante.

11.9.1.3 Évaluer la force subie par une petite particule réfléchissante, assimilée à une sphère de rayon a, placée dans un tel faisceau lumineux.

11.9.1.4 Quelques illustrations dans le système solaire

a) Comètes

i) Cette particule, de masse volumique μ, est située à une distance r du centre du Soleil. Calculer le rayon limite a_0 pour lequel la force de radiation, due au rayonnement solaire, équilibre l'attraction gravitationnelle due au Soleil. Données pour cette question :

$$\begin{aligned}
\mu &= 3\cdot 10^3 kg\cdot m^{-3} \\
G &= 6,67\cdot 10^{-11} kg^{-1}\cdot m^3\cdot s^{-2} && \text{constante de la gravitation universelle} \\
M_\odot &= 2\cdot 10^{30} kg && \text{masse du Soleil} \\
\langle P_\odot\rangle &= 4\cdot 10^{26} W && \text{puissance moyenne rayonnée par le Soleil}
\end{aligned}$$

ii) Cette étude permet-elle d'expliquer pourquoi le nuage gazeux, appelé queue, qui accompagne une comète est derrière la comète quand celle-ci s'approche du Soleil et devant lorsqu'elle s'en éloigne ?

b) Satellites en orbite terrestre

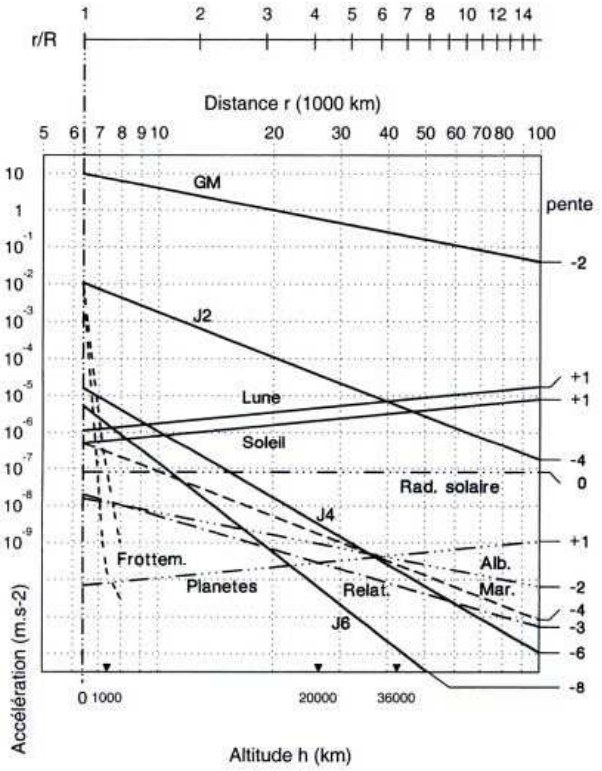


Figure 11.9 – Sources d'accélérations pour un satellite.

i) Les panneaux solaires des satellites en orbite autour de la Terre sont orientés pour que le rayonnement solaire y arrive sous incidence normale. Évaluer la force subie par un satellite de la constellation Galileo en raison de la pression de radiation solaire exercée sur les panneaux solaires (dimensions : $1655 \times 992mm$). Si le satellite a une masse de l'ordre d'une tonne, retrouvez-vous l'ordre de grandeur indiqué sur la figure 11.9 ?

ii) Sur la figure 11.9, les seules accélérations non-gravitationnelles sont la pression de radiation solaire, les frottements atmosphériques, et l'albédo terrestre. Discuter leur influence en fonction de l'altitude des satellites.

11.9.2 Transfert radiatif dans l'atmosphère

11.9.2.1 Calculer l'épaisseur optique et la transmission atmosphérique dans la raie d'absorption de la vapeur d'eau à $\lambda = 730\ nm$. On supposera un coefficient d'absorption de la vapeur d'eau de $k_{WV}(z) = k_0 \exp(-z/H_{WV})$, avec $H_{WV} = 2\ km$ et $k_0 = 0,5\ km^{-1}$. Calculer la transmission atmosphérique dans la bande $0,50\ -\ 0,75\ \mu m$, en supposant que la largeur de la raie d'absorption de la vapeur d'eau est de $40\ nm$.

11.9.2.2 Calculer le coefficient de diffusion au sol k_0, l'épaisseur optique et la transmission atmosphérique pour une atmosphère claire (pas d'aérosols), à $\lambda = 400$, 600 et $800\ nm$. On supposera que l'indice de réfraction de l'air est constant dans ce domaine spectral et qu'il vaut $1,0003$ au sol, et que le coefficient de diffusion diminue avec l'altitude selon $k_m^d(z) = k_0 \exp(-z/H)$ avec $H = 8\ km$.

11.9.2.3 Calculer le coefficient de diffusion au sol, l'épaisseur optique et la transmission atmosphérique dus aux aérosols à $\lambda = 400$, 600 et $800\ nm$, pour des visibilités de 23 et $10\ km$.

11.9.2.4 Calculer la luminance mesurée par un capteur aérien, provenant d'une surface de réflectivité uniforme, $\rho_{sol} = 0,2$, pour une zone au Soleil et une zone à l'ombre. On supposera le Soleil à 60° du zénith, et une épaisseur optique des aérosols de $0,2$ à $\lambda = 0,60\ \mu m$. On négligera l'effet de l'environnement et on estimera seulement la diffusion atmosphérique en supposant qu'il n'y a pas d'absorption et que cette diffusion est isotrope.

Bibliographie

[Acker, 2013] Acker, A. (2013). *Astronomie, Astrophysique*. Physique. Dunod, Paris.

[Acker & Jaschek, 1995] Acker, A. & Jaschek, C. (1995). *Astronomie – méthodes et calculs, exercices corrigés*. Collection De caedo. Masson, Paris. 3e édition.

[Batygin & Brown, 2016] Batygin, K. & Brown, M. E. (2016). Evidence for a distant giant planet in the solar system. *The Astronomical Journal*, 151(2):22. Accessible à l'adresse http://stacks.iop.org/1538-3881/151/i=2/a=22.

[Bock, 2001] Bock, O. (2001). Propagation des rayonnements électromagnétiques dans l'atmosphère. Cours de cycle Ingénieur des Travaux 1re année, École Nationale des Sciences Géographiques.

[Boissé, 2003] Boissé, P. (2003). Processus électromagnétiques et transfert de rayonnement. Cours de DEA « Astrophysique et instrumentation associée », Institut d'astrophysique de Paris.

[Boithias, 1983] Boithias, L. (1983). *Propagation des ondes radioélectriques dans l'environnement terrestre*. Collection technique et scientifique des télécommunications. Dunod, Paris.

[Bosser, 2013] Bosser, P. (2013). Propagation et rayonnement électromagnétique dans l'atmosphère. Cours de cycle Ingénieur des Travaux 1re année, École Nationale des Sciences Géographiques.

[Bosy & Borkowski, 2005] Bosy, J. & Borkowski, A. (2005). Troposphere modeling in local GPS network. *In Symposium of The IAG Subcomission for Europe (EUREF)*, Vienne.

[Chevy & Cohadon, 2016] Chevy, F. & Cohadon, P.-F. c. (2016). Cours d'optique. Cours de licence, École Normale Supérieure. Accessible à l'adresse http://www.phys.ens.fr/spip.php?article1850.

[Cohen-Tannoudji *et al.*, 2001] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. & Grynberg, G. (2001). *Photons et atomes – Introduction à l'électrodynamique quantique*. Savoirs actuels. EDP Sciences – CNRS éditions, Paris.

[Collin-Zahn, 2010] Collin-Zahn, S. (2010). Notions sur les processus de rayonnement et les diagnostics spectroscopiques en astrophysique. Cours aux DEA d'Astronomie de Paris 7-11 (Astrophysique et Techniques Spatiales) et Paris 6 (Méthodes instrumentales en Astrophysique), Observatoire de Paris, section de Meudon. Accessible à l'adresse http://www.luth.obspm.fr/~luthier/collin-zahn/fichiers/COURS-rayonnement.pdf.

[Courty, 2008] Courty, J.-M. (2008). Électromagnétisme dans la matière. Cours de licence L3 mention Physique Générale et Appliquée, Université Pierre et Marie Curie – Paris VI. Accessible à l'adresse http://www.edu.upmc.fr/physique/phys325/.

[Déau, 2007] Déau, E. (2007). *Les anneaux de Saturne revisités par les images de la sonde spatiale Cassini : Évolution dynamique de l'anneau F et Étude photométrique des anneaux principaux*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot. Accessible à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00255723/.

[Delobeau, 1967] Delobeau, F. (1967). *L'environnement de la Terre*. Collection La Science Vivante. Presses Universitaires de France, Paris.

[Duvel, 2011] Duvel, J.-P. (2011). Rayonnement et télédétection. Cours de Licence-Master de la Planète du département des Géosciences de l'ENS, École Normale Supérieure. Accessible à l'adresse http://www.lmd.ens.fr/jpduvel/site/teledetecttion.html.

[Falchi *et al.*, 2016] Falchi, F., Cinzano, P., Duriscoe, D., Kyba, C. C. M., Elvidge, C. D., Pornov, B. A., Rybnikova, N. A. & Furgoni, R. (2016). The new world altlas of artificial night sky brightness. *Science Advances*, 2. Accessible à l'adresse http://advances.sciencemag.org/content/2/6/e1600377.full.

[Feynman *et al.*, 2004] Feynman, R., Leighton, R. & Sands, M. (2004). *Le cours de physique de Feynman*. Traduction de Goery Delacôte. Dunod.

[Géniet, 2013] Géniet, F. (2013). Introduction au transferts radiatif. Cours au Master de Physique Informatique, Université de Montpellier 2. Accessible à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/80/45/53/PDF/Transfert_Radiatif.pdf.

[Henyey & Greenstein, 1941] Henyey, L. H. & Greenstein, J. L. (1941). Diffuse radiation in the galaxy. *The Astrophysical journal*, 93(70H):70–83. acessible à l'adresse http://adsabs.harvard.edu/full/1941ApJ....93...70H.

[Herring, 1992] Herring, T. A. (1992). Modeling atmospheric delays in the analysis of space geodetic data. *In Refraction of transatmospheric signals in geodesy*, The Hague. J. C. de Munck, T. A. Th. Spoelstra.

[Hladik & Chrysos, 2000] Hladik, J. & Chrysos, M. (2000). *Introduction à la mécanique quantique*. Dunod, Paris.

[IPCC, 2013] IPCC (2013). Summary for policy makers. *In* Stocker, T., Qin, D., Plattner, G.-K., Tignor, M., Allen, S., Boschung, J., Nauels, A., Xia, Y., Bex, V. & Midgley, P., éditeurs : *Climate Change 2013 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.

[Jackson, 2001] Jackson, J. D. (2001). *Électrodynamique classique*. Traduction de Christian Jeanmougin, relecture scientifique de Jean-Pol Vigneron. Dunod.

[Jahier, 2010] Jahier, E. (2010). *Les atomes froids*. Collection « Une introduction à ». EDP Sciences, Les Ulis. Préface de Michèle Leduc.

[Kasser, 1985] Kasser, M. (1985). Appareils électroniques de mesures de distances. Accessible à l'adresse http://michel.kasser.free.fr/AEMD-MK-85.pdf.

[Kasser, 2008] Kasser, M. (2008). Éléments de physique pour l'imagerie aérienne et spatiale et la géodésie. Cours au mastère « Photogrammétrie, Positionnement et Mesures de Déformations », École Nationale des Sciences Géographiques. Accessible à l'adresse http://michel.kasser.free.fr/PPMD.zip.

[Katsougiannopoulos *et al.*, 2006] Katsougiannopoulos, S., Pikridas, C., Rossikopoulos, D., Ifadis, I. M. & Fotiou, A. (2006). Tropospheric refraction estimation using various models, radiosonde measurements and permanent gps data. *In Shaping the Change – XXIII FIG Congress*, Munich.

[Labarthe, 2005] Labarthe, J.-J. (2005). Électromagnétisme. Cours de DEUG « S3 SMR », Laboratoire Aimé Cotton, Université Paris Sud Orsay. Accessible à l'adresse http://jean-jacques.labarthe.perso.sfr.fr/physique/S3SMRem.pdf.

[Léauthaud, 1999] Léauthaud, J.-M. (1999). Topométrie générale. Cours, École Nationale des Sciences Géographiques.

[Léna, 1986] Léna, P. (1986). *Méthodes physiques de l'observation*. InterÉditions/Éditions du CNRS.

[Levallois, 1969] Levallois, J.-J. (1969). *Géodésie générale – Tome 1 : méthodes générales et techniques fondamentales*. Collection scientifique de l'Institut géographique national. Eyrolles, Paris.

[Mouchet, 2011] Mouchet, M. (2011). Ondes électromagnétiques dans le vide. Préparation au concours interne de l'agrégation de physique-chimie, Université Paris-VII Denis Diderot.

[Nahmani, 2012] Nahmani, S. (2012). *Méthodologie en traitement de données GPS pour les Sciences de l'Environnement : Contributions à l'étude de la Mousson en Afrique de l'Ouest*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI – Sorbonne universités – Institut Géographique National – Laboratoire de recherche en géodésie.

[Nave, 2001] Nave, C. R. (2001). Hyperphysics. Cours en ligne, Department of Physics and Astronomy, Georgia State University. Accessible à l'adresse http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu.

[Ngô & Ngô, 2005] Ngô, C. & Ngô, H. (2005). *Physique quantique – Introduction*. Dunod, Paris.

[Niell, 1996] Niell, A. E. (1996). Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths. *Journal of geophysical research*, 101(b2):3227–3246.

[Olivier *et al.*, 2000] Olivier, S., More, C. *&* Gié, H. (2000). *Physique Spé. PSI*, PSI – Cours et exercices d'application*. Éditions Tec et Doc, Paris.

[Ollitrault, 2005] Ollitrault, J.-Y. (2005). Introduction à la théorie quantique des champs. Magistère interuniversitaire de physique 2e année, Institut de physique théorique, Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay. Accessible à l'adresse http://ipht.cea.fr/Pisp/jean-yves.ollitrault/cours.pdf.

[Parisi, 2001] Parisi, J.-M. (2001). Électromagnétisme. Cours de physique en mathématiques spéciales « Physique et Sciences de l'Ingénieur » (PSI*), Lycée Henri Loritz.

[Perez *et al.*, 1991] Perez, J.-P., Carles, R. *&* Fleckinger, R. (1991). *Électromagnétisme – Vide et milieux matériels, avec exercices et problèmes résolus*. Masson, Paris.

[Petit *&* Luzum, 2010] Petit, G. *&* Luzum, B. (2010). *IERS conventions (2010)*. Numéro 36 de IERS technical notes. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt-am-Main.

[Robichon, 2011] Robichon, A. (2011). Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique. Cours de physique en mathématiques spéciales « Physique-Chimie » (PC), Lycée Berthollet, Annecy. Accessible à l'adresse http://alainrobichon.free.fr/cours/Physique/Ondes/OEM_DLHI.pdf.

[UIT, 2013] UIT (2013). Recommendation ITU-R P-836-5 (07/2015) : Water vapour : surface density and total columnar content – P series – radiowave propagation. Accessible à l'adresse http://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.836-5-201309-I!!PDF-E.pdf.

[UIT, 2015] UIT (2015). Recommendation ITU-R P-453-11 (07/2015) : The radio refractive index : its formula and refractivity data – P series – radiowave propagation. Accessible à l'adresse https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.453-11-201507-I!!PDF-E.pdf.

Table des matières

Sommaire i

Avant-propos 1

Introduction 2

I Outils fondamentaux de l'électromagnétisme 3

1 Analyse vectorielle 4
1.1 Notion de champ . . . 4
1.1.1 Définition . . . 4
1.1.2 Champ scalaire . . . 4
1.1.3 Champs vectoriel . . . 4
1.1.4 Uniformité et constance . . . 4
1.2 Gradient . . . 4
1.2.1 Définition . . . 4
1.2.2 Propriété topologique . . . 5
1.2.3 Vecteur dérivant d'un potentiel scalaire . . . 5
1.2.4 Expression en coordonnées cartésiennes . . . 5
1.3 Divergence . . . 6
1.3.1 Définition . . . 6
1.3.2 Expression en coordonnées cartésiennes . . . 6
1.4 Rotationnel . . . 7
1.4.1 Définition . . . 7
1.4.2 Expression en coordonnées cartésiennes . . . 7
1.5 Laplacien scalaire . . . 8
1.6 Laplacien vectoriel . . . 8
1.7 D'Alembertien . . . 9
1.8 Nabla . . . 9
1.9 Autres relations . . . 9
1.9.1 Produits de deux champs . . . 9
1.9.2 Opérations identiquement nulles . . . 10

2 Postulats de l'électromagnétisme 11
2.1 Hypothèses fondamentales . . . 11
2.1.1 La conservation de la charge . . . 11
2.1.2 Les forces électromagnétiques . . . 13
2.1.3 Les équations de Maxwell . . . 13
2.2 Forme intégrale des équations de Maxwell et conséquences . . . 15
2.2.1 Théorème de Gauss . . . 15
2.2.2 Conservation du flux magnétique . . . 16
2.2.3 Loi de Faraday : l'induction . . . 16
2.2.4 Théorème d'Ampère . . . 16
2.3 Passage d'un champ électromagnétique à travers une surface . . . 17
2.3.1 Charges et courants surfaciques . . . 17
2.3.2 Relations de passage des composantes normales . . . 18
2.3.3 Relations de passage des composantes tangentielles . . . 18

2.3.4 Synthèse sur les relations de passage . . . 19
2.4 Énergie électromagnétique . . . 19
2.4.1 Puissance transmise par un champ électromagnétique à des charges . . . 19
2.4.2 Conservation de l'énergie . . . 20
2.4.3 Vecteur et théorème de Poynting . . . 21

II Propriétés des ondes électromagnétiques 23

3 Ondes électromagnétiques 24
3.1 Preuves expérimentales historiques . . . 24
3.1.1 La vitesse finie de la lumière . . . 24
3.1.2 Caractère ondulatoire de la lumière . . . 24
3.2 Équations d'onde . . . 25
3.2.1 Ondes des champs électromagnétiques . . . 25
3.2.2 Ondes des potentiels . . . 26
3.2.3 Électromagnétisme en régime stationnaire . . . 28
3.3 Solution des équations d'ondes . . . 30
3.3.1 Surface d'onde . . . 30
3.3.2 Ondes solutions . . . 30
3.3.3 Représentation complexe de l'onde plane progressive harmonique . . . 32
3.4 Polarisation . . . 34
3.4.1 Présentation . . . 34
3.4.2 Polarisation rectiligne . . . 34
3.4.3 Polarisation circulaire . . . 35
3.4.4 Polarisation elliptique . . . 35
3.4.5 Représentation de Jones . . . 35
3.5 Énergie d'une onde électromagnétique . . . 37
3.5.1 Relations générales dans le cadre de l'onde dans le vide . . . 37
3.5.2 Énergie moyenne . . . 38
3.5.3 Flux d'énergie . . . 38
3.6 Dispersion . . . 39
3.6.1 Groupe d'ondes . . . 39
3.6.2 La dispersion . . . 41
3.7 Le spectre électromagnétique . . . 44

4 Radiométrie 46
4.1 Considérations géométriques . . . 46
4.1.1 Angle solide . . . 46
4.1.2 Paramétrage général . . . 46
4.2 Grandeurs radiométriques . . . 48
4.2.1 Grandeurs physiques . . . 48
4.2.2 Grandeurs visuelles . . . 51
4.2.3 Grandeurs astrophysiques . . . 52
4.3 Radiométrie des surfaces . . . 53
4.3.1 Phénomènes radiométriques en surface . . . 53
4.3.2 Surfaces transparentes . . . 54
4.3.3 Surfaces réfléchissantes . . . 54
4.3.4 Surface diffusante . . . 55
4.3.5 Surfaces absorbantes . . . 59
4.3.6 Conservation de l'énergie . . . 59

III Interactions des ondes électromagnétiques avec la matière 60

5 Le corps noir : approche quantique de l'émission et de l'absorption des ondes électromagnétiques 61
5.1 La quantification de l'énergie : le corps noir . . . 61
5.1.1 Propriétés fondamentales du corps noir . . . 61
5.1.2 Modèle de Rayleigh-Jeans . . . 61

5.1.3 Modèle de Wien . . . 63
5.1.4 Modèle de Planck . . . 64
5.1.5 Surface émettrice réelle . . . 67
5.2 Introduction à la description quantique de l'interaction entre l'atome et la lumière . . . 67
5.2.1 Un fait expérimental : les raies spectrales . . . 67
5.2.2 L'atome . . . 68
5.2.3 Nombres quantiques . . . 70
5.2.4 Niveaux énergétiques atomiques et rayonnement . . . 72
5.3 Autres exemples de mécanismes d'émission . . . 76
5.3.1 Mécanismes thermiques . . . 76
5.3.2 Mécanismes non-thermiques . . . 76

6 Électromagnétisme des milieux 78
6.1 Description des milieux . . . 78
6.1.1 Description qualitative . . . 78
6.1.2 Grandeurs descriptives . . . 79
6.1.3 Dynamique des électrons . . . 83
6.2 Ondes électromagnétiques dans les milieux . . . 84
6.2.1 Équations de Maxwell . . . 84
6.2.2 Fréquences propres de la permittivité . . . 85
6.2.3 Propagation . . . 88
6.2.4 Réfraction . . . 89

7 Diffusion et transfert radiatif 96
7.1 La diffusion . . . 96
7.1.1 Le rayonnement dipolaire électrique : la diffusion de Rayleigh . . . 96
7.1.2 Diffusion de Mie . . . 103
7.1.3 Diffusion selon les lois de l'optique géométrique . . . 108
7.2 Transfert radiatif . . . 108
7.2.1 Transfert radiatif dans un milieu non diffusif . . . 109
7.2.2 Transfert radiatif dans un milieu diffusif . . . 110

IV Ondes électromagnétiques dans l'atmosphère 111

8 Propriétés de l'atmosphère terrestre 112
8.1 Lois générales concernant les gaz . . . 112
8.1.1 Équilibre hydrostatique . . . 112
8.1.2 Loi des gaz parfaits . . . 112
8.2 Paramètres thermodynamiques descriptifs . . . 113
8.2.1 Éléments introductifs . . . 113
8.2.2 Éléments liés à la masse volumique . . . 113
8.2.3 Températures . . . 114
8.2.4 Pressions . . . 115
8.3 Caractérisation de l'atmosphère terrestre . . . 117
8.3.1 Composition . . . 117
8.3.2 Histoire . . . 117
8.3.3 Structure verticale . . . 117
8.3.4 Structure latitudinale . . . 123
8.3.5 Transparence . . . 124
8.3.6 Le spectre solaire . . . 124
8.3.7 Bilan radiatif de la Terre . . . 125
8.3.8 Spectre solaire observé, spectre réfléchi . . . 126

9 Réfraction et tranfert radiatif atmosphérique 130
9.1 Propagation troposphérique . . . 130
9.1.1 La troposphère : un diélectrique . . . 130
9.1.2 Indices de réfraction troposphérique . . . 130
9.1.3 Absorption troposphérique . . . 134
9.1.4 Diffusion troposphérique . . . 135

9.2 Propagation ionosphérique . . . 139
9.2.1 Transparence de l'ionosphère . . . 139
9.2.2 Indice de réfraction . . . 140
9.3 Courbure de la trajectoire des ondes électromagnétiques . . . 141
9.3.1 Relations générales . . . 141
9.3.2 Quelques cas pratiques . . . 146
9.4 Retard des ondes électromagnétiques . . . 151
9.4.1 Délai troposphérique . . . 151
9.4.2 Délai ionosphérique . . . 154

10 Observer dans et à travers l'atmosphère terrestre 157
10.1 Phénomènes électromagnétiques atmosphériques . . . 157
10.1.1 Le bleu du ciel . . . 157
10.1.2 Le Soleil rouge à son lever et à son coucher . . . 157
10.1.3 La Lune rouge des éclipses totales de Lune . . . 158
10.1.4 L'atmosphère jaune des villes polluées et l'Harmattan . . . 158
10.1.5 Le blanc des nuages et leur assombrissement . . . 159
10.1.6 Arcs-en-ciel, gloires et halos . . . 159
10.1.7 Mirages . . . 160
10.1.8 Aurores polaires . . . 161
10.1.9 La réflexion des ondes radio sur l'ionosphère . . . 161
10.2 Missions spatiales et atmosphère terrestre . . . 163
10.2.1 L'observation de la Terre depuis l'espace . . . 163
10.2.2 Quelques éléments pour penser une mission spatiale d'observation de la Terre . . . 165
10.2.3 Géodésie satellitaire et atmosphère . . . 168
10.3 L'observation du cosmos depuis la Terre . . . 172
10.3.1 L'observation dans les bandes de transparence de l'atmosphère . . . 172
10.3.2 La pollution lumineuse . . . 172

Conclusion 175

V Annexes 176

11 Exercices 177
11.1 Diffraction et interférences . . . 177
11.1.1 Radar . . . 177
11.1.2 Interférométrie à très longue ligne de base . . . 178
11.2 Champs . . . 178
11.2.1 Sphère radioactive . . . 178
11.2.2 Propagation d'une onde . . . 178
11.2.3 Superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques . . . 178
11.2.4 Rayonnement d'une ampoule . . . 179
11.2.5 Puissance des signaux GPS (extrait de la composition 2013 – 2014) . . . 179
11.2.6 Poussée exercée par le rayonnement . . . 180
11.2.7 Cavité résonante . . . 180
11.2.8 Rayonnement d'une antenne demi-onde . . . 180
11.3 Milieux diélectriques . . . 181
11.3.1 Puissance moyenne dissipée dans le modèle de la charge élastiquement liée . . . 181
11.3.2 Propagation d'un paquet d'ondes dans le verre . . . 181
11.3.3 Le rôle de la couche d'ozone stratosphérique (extrait de la composition 2015 – 2016) 182
11.4 Milieux conducteurs . . . 184
11.4.1 Propagation dans un milieu conducteur . . . 184
11.4.2 Navigation par satellites et ionosphère . . . 184
11.4.3 Onde électromagnétique le long d'un conducteur parfait . . . 186
11.4.4 Propagation de l'énergie dans un plasma peu dense . . . 187
11.5 Physique quantique . . . 187
11.5.1 Puissance d'un laser . . . 187
11.5.2 Atome d'hydrogène . . . 187
11.5.3 Durée de vie d'un état excité d'un atome . . . 187

11.5.4 Électrons . . . 188
11.6 Flux, radiométrie, corps noir . . . 188
11.6.1 Angles solides . . . 188
11.6.2 Fond de ciel . . . 188
11.6.3 Impulsion du champ électromagnétique . . . 188
11.6.4 Pression de radiation . . . 189
11.6.5 Lampe de poche . . . 189
11.6.6 Observation d'un astre sphérique . . . 190
11.6.7 Constante solaire . . . 190
11.6.8 Observation d'astres du Système solaire . . . 191
11.6.9 Bilan radiatif d'un capteur aérien . . . 192
11.6.10 Radiomètre spatial . . . 193
11.6.11 Bilan radiométrique d'un satellite Pléiades (extrait de la composition 2013 – 2014) 193
11.6.12 Magnitudes stellaires et galactiques (extrait de la composition 2015 – 2016) . . . 194
11.7 Réfraction atmosphérique . . . 198
11.7.1 Optique géométrique . . . 198
11.7.2 Visée au tachéomètre . . . 198
11.7.3 Modélisation de la troposphère en GNSS . . . 199
11.7.4 Visée topométrique le long d'un mur (extrait de la composition 2013 – 2014) . . . 200
11.7.5 Nivellement indirect (extrait de la composition de rattrapage 2015 – 2016) . . . 200
11.8 Généralités . . . 201
11.8.1 Altimétrie spatiale (extrait de la composition de l'année 2014 – 2015) . . . 201
11.8.2 Météorologie radar (extrait de la composition 2016 – 2017) . . . 205
11.9 Devoir à la maison . . . 211
11.9.1 Ondes électromagnétiques et photons . . . 211
11.9.2 Transfert radiatif dans l'atmosphère . . . 212

Bibliographie **213**

Table des matières **216**